

# Introduction à la théorie quantique des champs

Bertrand Delamotte

4 novembre 2005



# Table des matières

<b>1</b>	<b>La théorie quantique des champs libres</b>	<b>5</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.1.1	Pourquoi faut-il utiliser des champs pour décrire les systèmes quantiques et relativistes? . . . . .	5
1.1.2	Digressions diverses : physique du solide, mécanique statistique et théories effectives . . . . .	9
1.2	Les champs classiques . . . . .	13
1.2.1	Symétrie de Lorentz/Poincaré — Transformations des champs classiques	13
1.2.2	L'action et les symétries dans le domaine classique . . . . .	14
1.2.3	Le principe de moindre action - L'équation d'Euler-Lagrange . . . . .	16
1.2.4	Exemples de Klein-Gordon et de Dirac . . . . .	17
1.3	Le théorème de Noether . . . . .	20
1.3.1	Lemme . . . . .	20
1.3.2	Énoncé du théorème de Noether - Courant conservé . . . . .	21
1.3.3	Invariance par translation - Conservation de l'impulsion . . . . .	22
1.3.4	Invariance par transformation de Lorentz homogène . . . . .	24
1.3.5	Conservation des charges de Noether . . . . .	25
1.3.6	Préliminaires au cas quantique . . . . .	25
1.4	Les champs quantiques libres . . . . .	26
1.4.1	Qu'est-ce qu'une théorie quantique? . . . . .	26
1.4.2	Transformations sous le groupe de Poincaré des champs quantiques . . . . .	29
1.4.3	Relations de commutation canoniques à temps égaux . . . . .	32
1.5	Le champ scalaire libre . . . . .	35
1.5.1	Introduction . . . . .	35
1.5.2	Le champ scalaire hermitique libre . . . . .	35
1.5.3	Le champ scalaire non hermitique libre . . . . .	46



# Chapitre 1

## La théorie quantique des champs libres

### 1.1 Introduction

#### 1.1.1 Pourquoi faut-il utiliser des champs pour décrire les systèmes quantiques et relativistes ?

Voilà une question difficile pour débiter un cours ! Bien des ouvrages font comme si elle ne se posait pas ou, pire, comme si la réponse allait de soi. Dans le meilleur des cas on invoque une analogie avec des cordes vibrantes censées être la “limite continue” d’une chaîne de masselottes reliées par des ressorts que l’on a “quantifié” par analogie avec les particules de la mécanique quantique galiléenne. Ou bien l’on se sert du fait que l’électromagnétisme est classiquement décrit par un champ pour décréter que dans le cadre quantique et Lorentzien tout doit être champ (“quantifié” là aussi par analogie aux particules). Mais ces façons de faire laissent le goût amer de l’insatisfaction. Si l’on voit bien pour la chaîne de masses et de ressorts que l’on peut ainsi décrire les phonons, quasi-particules tout à fait respectables correspondant aux vibrations quantifiées des ions d’un réseau, on pourrait (on devrait ?) se demander ce qui vibre dans le cas des photons. Après tout, le dix-neuvième siècle a énormément butté sur la question de l’éther, substrat censé supporter les vibrations correspondant au champ électromagnétique. Son rejet est d’ailleurs un des fondements de la relativité de Lorentz<sup>1</sup>, relativité que l’on veut précisément mettre au cœur de notre nouveau formalisme. Et puis si l’on veut bien admettre qu’il en faudra passer par un champ quantique pour l’électromagnétisme pourquoi devrait-il en être ainsi pour les électrons, les muons et autres quarks ou même  $W^\pm$  et  $Z_0$  ?

En un certain sens, la réponse à cette question devrait être simple puisque toute la théorie quantique des champs est une saga racontant le mariage des deux constantes fondamentales  $c$  et  $\hbar$ . La nouveauté radicale de ce domaine de la physique par rapport aux systèmes classiques et Lorentziens d’une part ou quantiques et galiléens d’autre part tient en ce que la présence simultanée de ces deux constantes fondamentales permet de construire une nouvelle *échelle de longueur* : la longueur de Compton

$$\lambda_{\text{Compton}} = \frac{\hbar}{mc} \tag{1.1}$$

---

<sup>1</sup>C’est l’expérience de Michelson et Morley qui a montré l’invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiels.

où  $m$  est la masse de la particule étudiée. Ainsi, à chaque type de particule est naturellement associée dans toute théorie à la fois quantique et lorentzienne une nouvelle échelle de longueur qui, bien évidemment, délimite un nouveau domaine de la physique. On voit clairement sur sa définition même que la longueur de Compton est nulle dans les deux limites formelles  $\hbar \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow \infty$  correspondant respectivement aux limites classique et galiléenne. Ainsi les domaines classique et/ou galiléen correspondent aux échelles de longueur beaucoup plus grandes que la longueur de Compton et le nouveau domaine à explorer est celui des petites longueurs comparées à cette échelle. A ce domaine d'échelles de longueur est associé en quantique un domaine d'impulsions et donc d'énergies : c'est le régime des hautes énergies par rapport à l'énergie de masse  $mc^2$ , régime où l'on peut créer des particules.

Ainsi, on peut déjà entrevoir le problème fondamental que l'on aura à résoudre : la relation  $E = mc^2$  détermine le taux de transformation d'énergie en matière et la mécanique quantique la probabilité avec laquelle cela peut se produire. Ainsi, dans une théorie quantique et relativiste de Lorentz, la possibilité de créer (et d'annihiler) des particules est au cœur de la physique et doit faire partie intégrante du formalisme : on ne peut pas se limiter à une théorie à nombre de corps fixé comme on le faisait en mécanique quantique.

Mais qu'est ce que tout cela a à voir avec des champs ? Il n'est pas du tout immédiat de répondre à cette question mais on peut à tout le moins avancer un certain nombre d'arguments « négatifs » montrant que le formalisme quantique utilisé dans le cadre galiléen n'est pas adapté au cadre lorentzien. Certains militeront en faveur de la notion de champ. Il faudra tout de même pas mal de patience et d'opiniâtreté, une fois introduits les champs, pour commencer à en voir l'intérêt véritable.

Commençons donc par l'...

**Argument 1.** Le formalisme traditionnel de la mécanique quantique (galiléenne) consiste à associer à chaque particule un jeu d'opérateurs : position  $\vec{X}$  et impulsion  $\vec{P}$  (et spin  $\vec{S}$  s'il y a lieu). Ces opérateurs agissent dans l'espace des états de la particule. L'évolution dans le temps de l'état du système (en représentation de Schrödinger) est unitaire ( $U^\dagger = U^{-1}$ ) :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad \text{avec} \quad U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (1.2)$$

Ainsi, même pour un système à  $N$  particules (à  $t = -\infty$ ) en interaction, le nombre (et la nature) des particules ne peut pas changer au cours du temps car la probabilité de présence de chacune d'elles, intégrée sur tout  $\mathbb{R}^3$ , reste 1 du fait de l'unitarité.

On peut certes modifier les potentiels d'interaction en y incluant des « corrections relativistes », pour décrire par exemple la structure hyperfine de l'atome d'hydrogène, rien n'y fait, ce formalisme est incapable de décrire la création ou l'annihilation de particules. A cause de ce type de processus on ne peut tout simplement plus se contenter d'associer un espace des états à chaque particule présente à un instant donné dans le système ( $t = -\infty$  par exemple). Il va donc falloir modifier en profondeur le formalisme quantique habituel pour décrire les processus de création et d'annihilation.

**Argument 2.** Le formalisme traditionnel de la mécanique quantique fait jouer un rôle très différent au temps et à l'espace : la position  $\vec{X}$  est un opérateur, le temps  $t$  un paramètre. En représentation de Schrödinger, ce sont les états qui dépendent du temps ( $|\psi(t)\rangle_S$ ). En représentation de Heisenberg, ce sont les opérateurs :  $\vec{X}^{(H)}(t), \vec{P}^{(H)}(t) \dots$

Tout cela est difficilement compatible avec un formalisme explicitement covariant de Lorentz où temps et espace doivent jouer le même rôle. Deux remèdes sont possibles :

i) On élève le temps à la dignité d'opérateur  $T$  (valeurs propres  $t \in \mathbb{R}$ ) et on le prend comme composante temporelle d'un quadrivecteur (d'opérateurs)  $X^\mu = (T, \vec{X})$ . Bien sûr, il

faut qu'il soit hermitique. Et bien sûr aussi, comme la quadri-impulsion  $P^\mu = (H, \vec{P})$  est déjà un quadrivecteur et que  $[X_i, P_j] = i\delta_{ij} = -i\eta_{ij}$ ,<sup>2</sup> on doit avoir :

$$[T, H] = -i\eta_{00} = -i \quad (1.3)$$

Mais ceci est catastrophique car alors  $H$  n'a plus de *fundamental* ! En effet, de (1.3) on déduit dans le cas infinitésimal (le montrer) :

$$e^{-i\varepsilon T} H e^{i\varepsilon T} = H - \varepsilon \quad (1.4)$$

Ainsi si  $|E\rangle$  est un état propre de  $H$ , on a :

$$\begin{aligned} H|E\rangle &= E|E\rangle \\ \Rightarrow e^{-i\varepsilon T} H e^{i\varepsilon T}|E\rangle &= (E - \varepsilon)|E\rangle \\ \Rightarrow H(e^{i\varepsilon T}|E\rangle) &= (E - \varepsilon)(e^{i\varepsilon T}|E\rangle) \end{aligned} \quad (1.5)$$

On déduit de ce calcul que  $e^{i\varepsilon T}|E\rangle$  est aussi état propre de  $H$  avec valeur propre  $E - \varepsilon$ . Il ne peut donc pas y avoir de *fundamental* puisqu'à chaque valeur propre de l'énergie il en existe une plus basse.

On voit que ce chemin, en tout cas dans cette version « naïve » est semé d'embûches. On essaie donc le second remède.

ii) On prend  $\vec{x}$  comme un paramètre et plus comme un opérateur. La quadriposition  $x^\mu = (t, \vec{x})$  est alors un paramètre et on n'a donc plus de problème de ce côté. Mais quid des opérateurs ? En représentation de Heisenberg, les opérateurs de la mécanique quantique sont des fonctions de  $t \rightsquigarrow$  idée : prendre des opérateurs (en représentation de Heisenberg) qui soient des fonctions de  $x^\mu : \varphi(x^\mu)$ . Ce sont des *champs d'opérateurs* !

Tout cela est bel et bon, mais quelle est la signification physique de ce  $\varphi(x)$  ? Dans le fond,  $\vec{X}$  et  $\vec{P}$  avaient l'avantage d'une interprétation simple et assez proche de notre intuition. Il faut bien reconnaître que c'est là une des difficultés de la théorie des champs : les champs eux-mêmes sont pour le moins abstraits. Passe encore pour l'électromagnétisme qui est classiquement décrit par un champ<sup>3</sup> et dont on peut se douter qu'on ne pourra pas faire moins dans le cas quantique, mais pour les électrons c'est autrement plus difficile à imaginer. C'est bien pourtant ce que l'on fera. Et ici deux petites remarques.

1. Ce n'est pas le moindre paradoxe de la théorie des champs qu'il faille, pour décrire des objets discrets comme les particules, utiliser un formalisme continu en termes de champs.
2. Il existe des analogues bien connus des deux façons de traiter la position — variable dynamique  $\vec{x}(t)$  ou paramètre  $\vec{x}$  — en physique classique. Par exemple, en hydrodynamique, on peut choisir de décrire la dynamique d'un fluide :
  - a) soit en isolant une « particule » de fluide et en suivant la trajectoire  $\vec{x}(t)$ . Dans ce cas  $\vec{x}(t)$  est une variable dynamique.
  - b) soit en se plaçant en un point fixe  $\vec{x}$  dans le fluide et en mesurant la vitesse du fluide en fonction du temps en ce point :  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ .  $\vec{x}$  est alors un paramètre et  $\vec{v}$  est un champ. C'est la variable dynamique du problème dans cette deuxième façon de faire. C'est bien souvent ce deuxième point de vue qui est le plus commode. Pour nous, en mécanique quantique relativiste, c'est le seul possible !

<sup>2</sup>On a choisi des unités où  $\hbar = 1$ .

<sup>3</sup>C'est effectivement via l'électromagnétisme que dans les années 30 nos grands prédécesseurs en sont progressivement venus à l'idée des champs quantiques.

**Argument 3.** Du fait des inégalités de Heisenberg —  $\Delta x \Delta p \sim 1$  (en unités de  $\hbar$ ) —, tenter de confiner un électron dans une boîte de très petite taille impose que son impulsion, et donc aussi son énergie cinétique  $E = p^2/2m$ , ait une très grande dispersion. Si la boîte atteint des dimensions de l'ordre de  $m^{-1}$  (en fait,  $\hbar/mc$ ) alors :

$$\Delta x \sim m^{-1} \quad \text{et donc} \quad \Delta p \sim m. \quad (1.6)$$

La particule devient relativiste et puisque  $E = \sqrt{m^2 + p^2}$  dans ce cas,  $E$  peut devenir plus grande que  $2m$  et une paire de particules peut se créer.<sup>4</sup> Ainsi, en voulant localiser la particule, on se met à en créer d'autres qui, étant strictement identiques à la première, nous font perdre tout espoir de savoir où elle était. On ne peut donc pas, à cause de la création de paires, définir la position d'une particule à mieux que  $\Delta x \sim m^{-1}$ . La longueur de Compton marque la frontière galiléen-lorentzien. À des échelles de longueur beaucoup plus grandes que  $m^{-1}$  on est dans le domaine galiléen : les corrections relativistes sont faibles et tout se passe comme si on pouvait localiser les particules avec une précision arbitrairement grande. En fait, en-dessous de  $m^{-1}$ , les paires (réelles ou virtuelles)  $e^+e^-$  modifient la structure de la particule telle qu'on la conçoit ordinairement. *Ceci a des conséquences considérables pour la physique à haute énergie* car un monde nouveau de fluctuations quantiques s'ouvre en dessous de cette échelle ou, de façon équivalente, au dessus de l'énergie de masse des particules. (Pour l'électron,  $m = 0.51$  MeV, et sa longueur de Compton est donc  $m^{-1} = 3.81 \cdot 10^{-11}$  cm.)

Voilà un argument supplémentaire pour oublier les opérateurs  $\vec{X}$  de position dans notre cas : les états propres  $|x\rangle$  n'ont pas de sens physique dans le cas lorentzien.<sup>5</sup>

Il faut ajouter à ce qui précède que la physique ne change pas discontinûment à l'échelle  $m^{-1}$  ou aux énergies de l'ordre de  $m$ . Pour pouvoir comprendre qualitativement et semi-quantitativement ce qui se passe à toute énergie, on invoque la notion de *particule virtuelle*, ce qui, littéralement, n'a pas de sens. Cependant, la physique étant l'art de raisonner juste avec des images fausses, on ne recule pas devant cet oxymoron. La notion de particule virtuelle repose sur la relation  $\Delta E \Delta t \sim 1$ . Telle que nous allons l'utiliser, cette relation est un essai de sauvetage quantique de concepts classiques : elle s'interprète en disant que tout se passe comme si l'on avait le droit de violer la conservation de l'énergie *classique* ( $\Delta E$ ) à condition que cela ne dure pas trop longtemps ( $\Delta t \sim 1/\Delta E$ ). Notons qu'en théorie quantique l'énergie, au sens quantique, est toujours conservée (c'est une conséquence de l'invariance par translation dans le temps). On se dit donc que l'on peut avoir création de paires  $e^+e^-$  (ou  $\mu^+\mu^-$ , etc) « virtuelles » pendant un temps n'excédant pas  $\Delta t \sim 1/2m$ . Une particule (réelle) est ainsi constamment entourée d'un nuage de paires virtuelles qui se créent et s'annihilent très rapidement.

On peut ainsi retrouver la notion de longueur de Compton. En effet, lorsqu'une paire se crée autour d'un électron, le positron virtuel est attiré par l'électron réel et il se peut qu'il l'annihile. La paire ne pouvant exister plus de  $\Delta t \sim m^{-1}$ , l'électron virtuel (qui devient l'électron réel après l'annihilation de l'autre électron) a au plus parcouru une distance  $\Delta x \sim m^{-1}$  pendant ce temps. Le résultat brut de ce processus est que tout se passe comme si l'électron avait une position (au sens classique) qui variait constamment de  $\Delta x \sim m^{-1}$  ce qui interdit de le localiser sur des distances plus petites que la longueur de Compton.

Il faut ajouter finalement que ce nuage ne change pas que la notion de position d'une particule mais également la notion de charge : si l'on va tester la charge de l'électron à

<sup>4</sup>Pour ce qui est des particules chargées comme les électrons, il doit y avoir création d'une paire  $e^+e^-$  pour conserver la charge et il faut  $\Delta p \sim 2m$ . Ce facteur 2 n'a pas d'importance dans le raisonnement qui suit.

<sup>5</sup>C'est également la raison pour laquelle la limite classique de l'électrodynamique n'est pas donnée en termes de particules mais de champs : pour  $m = 0$  la longueur de Compton est infinie et les particules (les photons) sont toujours d'origine quantique. Seuls des états particuliers, appelés états cohérents, confèrent au champ de photons une limite classique.



courte distance on commence à pénétrer dans le nuage qui, étant polarisé par la présence de l'électron réel, écran la charge. L'écrantage diminue à mesure que l'on pénètre dans le nuage et la charge ainsi testée augmente lorsqu'on la teste à haute énergie.<sup>6</sup> Une particule quantique relativiste a donc une structure autrement plus compliquée que dans les cas galiléen ou classique.<sup>7</sup> Le vide est d'ailleurs lui aussi beaucoup plus complexe, car il est aussi peuplé de paires virtuelles  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $q\bar{q}$ ...

Pour conclure, on pourrait dire que la théorie quantique relativiste a résolu le vieux paradoxe de la physique classique des particules : ponctuelles, elles sont source de problèmes car alors le formalisme devient pathologique (il y a des infinis un peu partout dans le formalisme, l'action du champ créé par la particule sur elle-même est problématique, la causalité semble pouvoir être violée, etc), non ponctuelles, elles sont inévitablement déformables et, par conséquent, plus élémentaires. En théorie quantique relativiste, les particules peuvent être *élémentaires sans pour autant être ponctuelles* : le nuage de particules virtuelles qui les « habille » leur donne une structure non triviale sur une échelle de l'ordre de quelques longueurs de Compton et il n'existe pas de couteau permettant de séparer une particule quantique relativiste de son nuage à mieux que  $\hbar/mc$  car ce couteau lui-même crée de nouvelles particules.

Il faut noter ici une différence fondamentale entre les cas galiléen et lorentzien. On pourrait en effet penser que, déjà en mécanique quantique, les particules ne sont plus ponctuelles puisqu'elles sont décrites par des paquets d'onde d'extension finie. Cet argument, correct évidemment, masque cependant une caractéristique cruciale : rien dans la théorie galiléenne ne fournit d'*échelle typique* de cette extension. Avec les caractéristiques intrinsèques d'une particule, sa masse, sa charge, son spin et la constante fondamentale de la théorie,  $\hbar$ , on ne peut pas créer d'échelle de longueur. D'ailleurs, on le sait bien, rien n'empêche de considérer — au sens d'une limite — un état complètement localisé  $|\vec{x}\rangle$ . La situation est tout autre dans le cas lorentzien : la présence d'une nouvelle constante fondamentale,  $c$ , permet de construire une échelle de longueur :  $\hbar/mc$ .

### 1.1.2 Digressions diverses : physique du solide, mécanique statistique et théories effectives

En physique du solide aussi on a bien souvent besoin d'un formalisme décrivant la création et l'annihilation de quasi-particules (phonons, magnons, etc) qui sont les excitations élémentaires des systèmes étudiés (les atomes ou les spins des ions d'un réseau cristallin pour les phonons et les magnons). Le vide est là aussi non trivial. Pour les systèmes électroniques, il correspond au remplissage des états jusqu'au niveau de Fermi (lorsqu'il existe). Lorsqu'on crée une excitation élémentaire de ce système en ajoutant un électron au système (au dessus de la mer de Fermi) celui-ci va interagir avec les électrons de la « mer » si bien que la vraie excitation élémentaire — la quasi-particule — ne consiste pas en un électron (dit « nu ») mais un électron dans le « fond » des autres électrons de la mer (on dit qu'il s'agit d'un électron « habillé »). Ainsi la masse de cette quasi-particule peut être différente (voir très différente, cf les « fermions lourds ») de la masse de l'électron car son inertie est changée par l'interaction avec le « vide » (la mer de Fermi). Il peut en être de même pour d'autres grandeurs comme la charge (ex : l'effet Hall fractionnaire). Ces « renormalisations », qui existent aussi en physique des particules, sont une conséquence non triviale de la mécanique quantique qui impose l'existence d'un « vide » (i.e. d'un état fondamental) non trivial (habité, par rapport

<sup>6</sup>À noter que dans les théories de jauge non-abéliennes, comme la chromodynamique quantique, il y a au contraire un effet d'anti-écrantage : testés à haute énergie, tout se passe comme si les quarks étaient libres, qu'ils n'avaient plus de charge de couleur.

<sup>7</sup>C'est le rôle du *groupe de renormalisation* que de décrire la dépendance de la charge avec l'échelle.

au cas classique, d'une foultitude de « fluctuations quantiques ») et d'*états excités quantifiés* au-dessus de ce vide : les particules ou les quasi-particules, suivant que l'on étudie de véritables particules élémentaires ou les quasi-particules de la physique du solide.

Ajoutons encore deux remarques :

1. On voit souvent écrit que  
théorie des champs = mécanique quantique + relativité de Lorentz.  
Si ceci était vrai, cela signifierait que son champ d'application se limiterait à la physique des particules. Or, comme nous l'avons déjà dit précédemment, il n'en est rien puisque ce formalisme s'applique aussi en physique du solide. Il vaut donc mieux dire : mécanique quantique + relativité de Lorentz  $\Rightarrow$  théorie quantique et relativiste des champs et ne pas en inférer, abusivement, la réciproque.
2. La première remarque s'appuyait sur le fait que la physique du solide, hautement non relativiste, pouvait se servir de théorie des champs, et même devait le faire, quand elle devait décrire un système à  $N$  corps, quantique, ayant un vide et des excitations élémentaires non triviaux. L'aspect quantique était fondamental dans ce cas. Il peut en fait se faire que cet aspect ne soit pas, lui non plus, nécessaire ! C'est le cas par exemple des systèmes thermodynamiques au voisinage d'une transition de phase du second ordre. Alors finalement, quand la théorie des champs est-elle vraiment nécessaire ?

La réponse à cette question est non triviale, et nécessite, pour être réellement comprise, pas mal de pratique de... théorie des champs (plus exactement, de la notion de groupe de renormalisation). Voici tout de même la réponse : à chaque fois que l'on a un système à  $N$  corps en interaction dont on suppose connue la physique microscopique, i.e. à courte distance (ou haute énergie), celle-ci est décrite par une *théorie effective* qui est une théorie (renormalisable) des champs.<sup>8</sup> En physique des particules, le modèle standard est très probablement la théorie effective à « basse énergie » d'une théorie plus fondamentale (grande unification, cordes ?). En matière condensée, la théorie des phonons par exemple est une théorie effective à basse énergie des vibrations d'un cristal constitué à courte distance de noyaux et d'électrons, etc.

Une remarque finale sous forme de dialogue :

- L'étudiant : « Est-il vrai que depuis tout petit je fais des théories effectives sans le savoir ? »
- L'enseignant : « Eh, oui ! Mais l'enseignement étant l'art de cacher les choses importantes pour faire ressortir les autres, si utiles pour poser des problèmes d'examen, voilà un concept qui ne fait pas la une des bouquins ! »
- L'étudiant : « Mais alors, l'électrocinétique, la thermodynamique, les équations de Maxwell et que sais-je encore, sont des théories effectives à grande échelle de théories plus microscopiques, et du coup plus fondamentales ? »
- L'enseignant : « Oui. »
- L'étudiant : « Et il en est ainsi de tout ce que j'ai appris en physique ? »
- L'enseignant : « De presque tout. »
- L'étudiant : « ... »
- L'enseignant : « Eh bien, jusqu'à présent le principe de relativité de Lorentz n'apparaît pas comme les cendres de quelque chose de plus fondamental, contrairement à Galilée. De même pour les principes quantiques. Mais cela pourrait changer. Par exemple, des

---

<sup>8</sup> En fait, il faut aussi supposer que la physique à grande échelle est, dans une large mesure *découplée* de celle à petite échelle (notion d'universalité). C'est ce qui se passe, hormis pour le chaos, dans la plupart des systèmes :  $PV = nRT$  ne dépend pas de la nature moléculaire du gaz,  $U = RI$  du réseau cristallin, des impuretés ni de la nature des ions, etc

gens pensent que la distinction entre temps et espace n'est pas bien jolie et pourrait n'être qu'un artefact de notre perception de l'univers à basse énergie. Qui sait ce qui va émerger d'une théorie quantique de la gravitation ? »

- L'étudiant (plein d'espoir) : « Mais alors c'est vraiment le triomphe du réductionnisme façon 19<sup>e</sup> siècle, avec son savoir en poupées russes. Une fois connue la « théorie ultime » il y a une cascade de théories effectives qui, en dernier ressort, doivent être capables d'expliquer l'inconscient freudien, la disparition des dinosaures et la météo de demain ! »
- L'enseignant (très énervé) : « Ah, non ! Ceci n'est plus que le discours d'une minorité vieillissante, mais malheureusement active, de physiciens des particules en quête de financement. S'il en était tel que vous le dites, il serait urgent d'enseigner aux psychanalistes, paléontologues et météorologistes le maximum de chromodynamique quantique et d'interaction électro-faible. . . qui d'ailleurs ne leur serait d'aucune utilité car ce qu'ils devraient vraiment connaître, c'est la théorie ultime. . . qui n'existe pas ! »
- L'étudiant (penaud mais tenace) : « Bien sûr, je comprends qu'un dentiste, pour arracher une dent, n'ait pas besoin de connaître cela, mais tout de même, au niveau des principes. . . »
- L'enseignant (qui a du mal à se contenir) : « Au niveau des principes, c'est votre image des poupées russes qui ne va pas. Avec les poupées, on peut comprendre la structure de la plus grande une fois que l'on a vu la plus petite, quand bien même il y a un rapport de taille de  $10^{40}$  ! Mais il en va tout différemment en physique. Le modèle standard, par exemple, nous dit peu de choses sur la physique des nucléons, qui nous dit peu de choses sur la physique des atomes et des molécules, qui ne nous dit quasiment rien sur celle des fluides qui est encore assez éloignée de la météorologie. La petite poupée ne nous dit au final pratiquement rien sur la plus grande ! Et c'est heureux, car c'est ce qui nous permet de faire de la physique ! Alors le seul principe pertinent, c'est que quelque soit la future théorie quantique de la gravitation, unifiée ou non avec les autres interactions, il est impératif qu'elle soit *sans aucune importance* sur toute la physique que l'on connaît déjà ! Le principe, c'est que la plus petite poupée n'influence en rien la plus grande. C'est l'anti-réductionnisme ! »
- L'étudiant : « Mmh ! Admettons. Mais comment se fait-il qu'il en soit ainsi ? »
- L'enseignant : « Pour de multiples raisons qui n'ont rien à voir avec les particules élémentaires et qui sont très générales. Tout d'abord, la plupart des phénomènes physiques ont une échelle de longueur (ou d'énergie, etc) intrinsèque. À des échelles très différentes de cette échelle, le phénomène est inopérant. Prenez l'interaction nucléaire entre deux hadrons, véhiculée par les pions. À des échelles beaucoup plus petites que le fermi cette notion n'a aucun sens car les hadrons n'ont aucune pertinence, seuls les quarks et les gluons en ont. À des échelles beaucoup plus grandes, l'interaction nucléaire entre deux hadrons est négligeable. Deuxièmement, il peut se faire qu'en mettant ensemble un grand nombre de corps, même en interaction à courte portée, ils développent des comportements collectifs tout-à-fait non triviaux. C'est ce qui se passe, par exemple, quand on met beaucoup de molécules d'eau ensemble. Individuellement, elles ne savent pas faire grand chose, mais mises ensemble elles sont capables de faire des choses étonnantes : changement de phase entre 99,9 °C et 100,1 °C avec formation de bulles, dégagement de chaleur latente, etc. Rebelote à 0 °C avec possibilité de formation de cristaux de neige ; à  $T_c = 647$  K et  $\rho_c = 0,32$  g/cm<sup>3</sup> il existe un point critique avec apparition du phénomène d'opalescence critique. . . Bref, pour reprendre un mot devenu célèbre, « More is different » (P.W. Anderson). Et là, la question se repose : doit-on tout connaître de la molécule d'eau et des interactions entre molécules pour décrire tout cela, ou existe-t'il des théories effectives à grande échelle qui nous suffisent ? En d'autres termes, existe-t'il des processus de moyennation qui gommant

à grande échelle les détails microscopiques? La réponse est évidemment oui, sinon il faudrait résoudre à tout coup le problème à  $N$  corps. Au lieu de cela, l'équation des gaz parfaits par exemple est valable pour un gaz classique dilué, indépendamment de la nature chimique du gaz, de la trajectoire précise de chacune des molécules, etc. Le système génère lui-même les variables  $P$ ,  $V$ ,  $T$  pertinentes à l'échelle de description macroscopique et oublie sa nature microscopique. C'est cela l'universalité (cf note en bas de la page 10). »

- L'étudiant (fatigué) : « Mais pour faire de la thermodynamique des gaz, parfaits ou non, nul besoin de théorie des champs. Quid alors de l'équation : théorie effective (+ universalité) = théorie des champs (renormalisable)? »
- L'enseignant : « Eh bien! Ce que vous venez de dire est presque vrai! Qu'est-ce qu'un champ, après tout? C'est une variable, quelle qu'elle soit, spatialement distribuée. Si la structure spatiale du système étudié est triviale, les théories de champ effectives dégénèrent en des théories où les champs sont indépendants de la position : ce sont des nombres ordinaires. Pour prendre le langage thermodynamique, ceci signifie qu'une fluctuation en un endroit du système est incapable de se propager pour aller influencer significativement ce qui se passe un peu plus loin : on dit que le système est décorrélé. Dans ce cas, les valeurs moyennes des grandeurs thermodynamiques nous suffisent, leurs fluctuations et les corrélations spatiales de ces fluctuations sont négligeables. Au contraire, s'il est fortement corrélé (c'est ce qui se passe au voisinage d'une transition de phase du second ordre), alors il est nécessaire de prendre en compte l'aspect spatial du problème : on a des champs. Donc même pour la thermodynamique d'un fluide, il peut être nécessaire de faire de la théorie des champs! »
- L'étudiant : « Et la physique des particules, c'est un système fortement corrélé, puisqu'on y fait de la théorie des champs? »
- L'enseignant : « Oui, c'en est un, en un sens. Si l'on remplace les mots « propagation d'une fluctuation thermique » par « propagation d'une particule quantique », et « échelle de corrélation » par « portée de l'interaction », <sup>9</sup> on a en effet un parallèle complet. Le fait non trivial dans un cas est de pouvoir générer une échelle de corrélation de l'ordre de la taille du système entier à partir d'interactions entre molécules, dont la portée est microscopique, et dans l'autre cas d'avoir des particules comme les  $W^\pm$  et  $Z^0$  dont les masses sont de l'ordre de  $10^2$  GeV alors que l'énergie typique de la gravitation quantique où l'on subodore que tout se dénoue est de l'ordre de  $10^{19}$  GeV (problème de la hiérarchie). La différence majeure entre les deux cas, c'est que l'échelle de corrélation d'un système statistique est une fonction de la température, qui est une donnée facilement modifiable expérimentalement. En faisant varier la température on arrive à trouver la température de transition de phase (du second ordre, s'il s'agit bien d'un second ordre). Pour les particules, personne ne connaît le bouton qui permettrait de faire varier à loisir les masses des bosons vecteurs! »

Et maintenant que la notion de champ est acquise (?), voyons ce qu'il en est des champs classiques et quantiques.

---

<sup>9</sup>En physique quantique, la portée de l'interaction est l'inverse de la masse de la particule véhiculant l'interaction (cf potentiel de Yukawa). L'analogue de la longueur de corrélation de la mécanique statistique est l'inverse de la masse du porteur de l'interaction.

## 1.2 Les champs classiques

### 1.2.1 Symétrie de Lorentz/Poincaré — Transformations des champs classiques

Cette section sera seulement un résumé de ce qui a été exposé en détail dans le cours « Un soupçon de théorie des groupes ... » au chapitre IV.

Nous nous placerons toujours dans le point de vue passif où le système étudié ne change pas et où ce sont les observateurs (les repères) qui sont transformés. L'espace de Minkowski est muni de la métrique de signature  $(1, -1, -1, -1)$  et la distance est

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.7)$$

Une transformation de Lorentz sur les coordonnées est donnée par

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{avec} \quad \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

ce qui définit les  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  et une translation par

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}. \quad (1.9)$$

Pour une transformation infinitésimale :

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \epsilon^{\mu}_{\nu} \quad \text{avec} \quad \delta^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu}_{\nu} \quad \text{et} \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu} \quad (1.10)$$

qui découle de (1.8). Les six paramètres  $\epsilon_{\mu\nu}$  indépendants contiennent les trois paramètres de rotation  $\vec{\theta}$  et les trois de boost  $\vec{\phi}$  :<sup>10</sup>

$$\Lambda = e^{-\vec{\phi} \cdot \vec{K} + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \quad (1.11)$$

avec  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$  les générateurs des rotations et des boosts. L'équation (1.11) se réécrit commodément

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2} \theta_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}} \quad (1.12)$$

où les  $J_{\alpha\beta}$  sont chacun, à  $\alpha$  et  $\beta$  fixés, des matrices  $4 \times 4$  d'éléments de matrice  $(J_{\alpha\beta})^{\mu}_{\nu} = i(\delta^{\mu}_{\alpha} \eta_{\nu\beta} - \delta^{\mu}_{\beta} \eta_{\nu\alpha})$ . Ils sont reliés aux  $\vec{J}$  et  $\vec{K}$  par

$$\begin{cases} J_{0i} = -iK_i \\ J_{ij} = \varepsilon_{ijk} J_k \end{cases} \quad (1.13)$$

L'algèbre des  $J^{\alpha\beta}$  (algèbre de Lie du groupe de Lorentz) est

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}) \quad (1.14)$$

De manière générale, une quantité  $\phi$  à  $n$  composantes engendrant une représentation linéaire du groupe de Lorentz se transforme lors d'une transformation de Lorentz de paramètres  $\theta_{\alpha\beta}$ , Eq.(1.12), en

$$\phi' = D(\theta)\phi \quad \Rightarrow \quad \phi'_{\alpha} = D^{\beta}_{\alpha}(\theta)\phi_{\beta} \quad (1.15)$$

avec  $D(\theta)$  les matrices  $n \times n$  représentant le groupe de Lorentz dans la représentation engendrée par  $\phi$ . Si

<sup>10</sup>Attention, pour des transformations infinitésimales, on peut effectivement séparer facilement ce qui est boost ( $\vec{\phi}$ ) de ce qui est rotation ( $\vec{\theta}$ ). Il n'en est en général plus de même pour des transformations finies puisque  $e^{-\vec{\phi} \cdot \vec{K} + i\vec{\theta} \cdot \vec{J}} \neq e^{-\vec{\phi} \cdot \vec{K}} e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}$ .

- $\phi$  est un scalaire,  $D(\theta) = 1$ ,
- $\phi$  est un bi-spineur de Dirac :  $\phi_\alpha$ ,  $D(\theta) = e^{-\frac{i}{4}\theta_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}}$  avec  $\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ ,
- $\phi$  est un 4-vecteur :  $\phi_\mu$ ,  $D(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}}$ .

De manière générale, on posera :

$$D(\theta) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}}. \quad (1.16)$$

Pour ce qui est des champs, une petite complication supplémentaire intervient. La relation (1.15) devient

$$\phi'(x') = D(\theta)\phi(x) \quad (1.17)$$

ce qui signifie que c'est le nouveau champ au nouveau point qui est "tourné" par rapport à l'ancien champ à l'ancien point. Si l'on veut calculer la variation de la fonction  $\phi$ , il faut non seulement tenir compte de la variation  $D(\theta)$  due à sa nature tensorielle mais aussi du fait que  $\phi$  et  $\phi'$  ne sont pas évalués pour les mêmes arguments. On obtient finalement :

$$\phi'(x) = e^{-\frac{i}{2}\theta_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}}\phi(x) \quad (1.18)$$

avec

$$J_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha). \quad (1.19)$$

$L$  tient compte de la partie "orbitale" et  $S$  de la partie "intrinsèque" (ou de spin) de la transformation. On notera que l'on a appelé  $J_{\alpha\beta}$  deux objets différents dans (1.12) et (1.19) ce qui n'est qu'un léger abus de langage puisque le contexte nous permet à chaque fois de savoir quelle forme on doit prendre pour  $J_{\alpha\beta}$ .

## 1.2.2 L'action et les symétries dans le domaine classique

Quand on parle de champ classique, on pense tout de suite au champ électromagnétique et au champ de gravitation. Quantiquement, ces champs sont de spin 1 et 2 respectivement. Nous envisagerons également des champs scalaires (spin 0) et ce que nous dirons sera complètement général si bien que nous l'appliquerons sans vergogne au champ de Dirac (spin 1/2). Le caractère quantique sera codé dans les relations de commutation (ou d'anti-commutation) des champs.

Toutes les lois fondamentales de la physique classique peuvent s'obtenir par un principe de moindre action.<sup>11</sup> C'est, par exemple, une formulation alternative du principe fondamental de la dynamique en mécanique classique. Comme d'habitude, lorsqu'on construit une nouvelle théorie censée englober une ancienne, seul un petit nombre de formulations de l'ancienne théorie ont des chances de se généraliser à la nouvelle. Il est bon pour cette raison de connaître les différentes formulations de l'ancienne théorie, même si ceci peut, à première vue, paraître un jeu stérile de théoricien. Ainsi, parmi les différentes formulations de la mécanique classique, seules les formulations hamiltonienne et lagrangienne sont intéressantes pour passer à la mécanique quantique ( $\vec{F} = m\vec{a}$  n'est d'aucune utilité). Pour passer à la théorie des champs (quantique, mais aussi classique), c'est la formulation lagrangienne seule qui permet d'incorporer commodément la symétrie relativiste. Les notions de hamiltonien, d'énergie propre, d'états stationnaires ne perdent pas leur intérêt, mais ils ne nous suffisent

<sup>11</sup>Évidemment, il faut s'entendre sur le mot fondamental. Les lois de la thermodynamique, par exemple, ne dérivent pas d'un principe de moindre action. Ce principe est assez mystérieux dans le cadre classique et peut, suivant le jeu d'axiomes que l'on choisit, devenir un théorème dans le cadre quantique. Il est bien sûr remplacé alors par d'autres mystères, pas moins opaques : la « quantification » par intégrale fonctionnelle. Dans le cadre du formalisme dit canonique (sans intégrale fonctionnelle) il reste un axiome de la théorie quantique des champs.

tout simplement plus. La difficulté peut déjà se comprendre sur l'exemple de la particule galiléenne où les opérateurs fondamentaux sont  $\vec{X}$  et  $\vec{P}$ . Comme toujours en quantique,<sup>12</sup> une théorie est invariante sous un groupe  $G$  de symétrie si :

$$\forall U \in G, \quad [H, U] = 0 \quad (1.20)$$

où  $H = H(\vec{X}, \vec{P})$  est le hamiltonien du système, et les  $U = U(\vec{X}, \vec{P})$  sont les éléments de  $G$ . Plus exactement, les  $U$  sont les fonctions de  $\vec{X}$  et  $\vec{P}$  qui représentent les éléments de  $G$ , i.e. qui obéissent à la même table de multiplication que les éléments de  $G$ .<sup>13</sup> La difficulté est donc de construire *à la fois* le bon hamiltonien du système (qui commute avec  $U$ ) et les  $U$  qui vérifient l'algèbre de  $G$ . Dans le cas galiléen, c'est encore faisable et on peut montrer que le hamiltonien le plus général pour un système à une particule et invariant sous le groupe de Galilée est :

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{P} - \vec{A}(\vec{X}))^2 + V(\vec{X}) \quad (1.21)$$

où  $\vec{A}$  et  $V$  sont des champs extérieurs. C'est beaucoup plus difficile en théorie quantique des champs !

Heureusement, la formulation lagrangienne va nous sauver. En effet, l'action  $S$  sera automatiquement invariante sous le groupe de Poincaré en la prenant égale à l'intégrale d'une densité lagrangienne (appelée abusivement lagrangien tout court) elle-même scalaire de Lorentz et ne dépendant pas explicitement de  $x^\mu$  ( $\mathcal{L}$  dépend de  $x^\mu$  implicitement via sa dépendance dans le champ  $\phi(x)$  et ses dérivées) :

$$S = \int d^D x \mathcal{L} . \quad (1.22)$$

Les équations du mouvement des champs (dites d'Euler-Lagrange) se déduiront du principe de moindre action (voir la suite page 1.2.3) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0 \quad (1.23)$$

et seront alors automatiquement covariantes.<sup>14</sup> De plus nous verrons dans la suite, grâce au théorème de Noether, comment construire les opérateurs  $U$  représentant les éléments des groupes  $G$  d'invariance (Poincaré, jauge, etc) *à partir de l'action*. Tout se fera donc sans douleur à partir de l'action tant du point de vue de la construction d'une dynamique covariante de Lorentz que de celle de l'action du groupe sur les champs. En outre, nous verrons que  $\mathcal{L}$  et la densité de hamiltonien sont transformés de Legendre l'un de l'autre, ce qui nous permettra de construire ce dernier commodément.

En attendant de voir cela, passons en revue quelques propriétés de l'action. Nous les énoncerons sur l'exemple d'un champ scalaire, la généralisation à plusieurs champs de natures tensorielles différentes étant triviale.

–  $S$  est l'intégrale d'une densité lagrangienne :

$$S = \int d^D x \mathcal{L} \quad (1.24)$$

<sup>12</sup>Et en représentation de Schrödinger.

<sup>13</sup>On dit que  $\vec{X}$  et  $\vec{P}$  forment l'ensemble irréductible des opérateurs décrivant une particule galiléenne sans spin (à ne pas confondre avec « l'ensemble complet d'observables qui commutent »). Pour ceci et la suite, on peut consulter le chapitre sur la mécanique quantique du polycopié « Un soupçon de théorie des groupes ».

<sup>14</sup>L'équation (1.23) est donnée ici pour un champ scalaire  $\varphi$ . La transposition à un champ quelconque est triviale (voir la suite). La démonstration en est donnée un peu plus loin.

et  $\mathcal{L}$  est une fonction *locale* du champ et de ses dérivées *premières* :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad (1.25)$$

Par locale, on entend que  $\mathcal{L}$  est fonction de  $\varphi$  et  $\partial_\mu \varphi$  en un point seulement. Par exemple des termes comme

$$\int d^D y V(x-y) \varphi(x) \varphi(y) \quad (1.26)$$

avec  $V$  une fonction non triviale (i.e.  $\neq \delta(x-y)$ ) sont interdits. Cette exigence de localité a deux origines. Tout d'abord la notion même de champ repose sur l'idée qu'il n'y a pas d'action à distance (potentiel  $V$ ), mais qu'au contraire l'action d'une particule en  $x$  sur une particule en  $y$  est véhiculée elle-même par une particule « intermédiaire » relevant elle aussi de la description en termes de champs quantiques (et non d'un potentiel extérieur). Ensuite, il est très compliqué de faire de la théorie des champs non locale!

- $\mathcal{L}$  n'est censé contenir que les dérivées premières de  $\varphi$  et de façon au plus quadratique :  $\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi$  ou, pour un champ de Dirac,  $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$ . C'est l'analogie de ce qui se passe en mécanique classique où :

$$S = \int dt L \quad \text{avec} \quad L = L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad (1.27)$$

avec  $x$  la position et  $\dot{x}$  la vitesse. Il y a des raisons profondes pour que  $\mathcal{L}$  ne dépende que de  $\partial_\mu \varphi$  et au plus quadratiquement : causalité, problème de Dirichlet, renormalisabilité... Nous l'accepterons comme un principe, sa justification n'étant pas très commode à ce stade (la notion de renormalisabilité est nécessaire).

- $S$  est réelle. Dans le cas quantique, elle sera hermitique. C'est ce qui assurera par la suite l'unitarité de la théorie (la somme des probabilités reste bien égale à 1).
- $S$  est un scalaire pour tous les groupes de symétrie de la théorie considérée, Poincaré en particulier.  $\mathcal{L}$  est donc invariant de Lorentz. *C'est là le point fort de la formulation lagrangienne : construire une théorie, c'est trouver l'ensemble de tous les scalaires qui peuvent être faits avec  $\varphi$  et  $\partial_\mu \varphi$  :  $\mathcal{L}$  est la somme de ces scalaires.* Ainsi construite, la théorie qui en découlera sera automatiquement covariante pour toutes les symétries pour lesquelles  $S$  est scalaire.
- $S$  est sans dimension en unités de  $\hbar$  (i.e.  $\hbar = 1$ ) :  $[S/\hbar] = 1$ .
- $\mathcal{L}$  est une fonction de  $\varphi$  et  $\partial_\mu \varphi$  et  $S$  est une fonctionnelle<sup>15</sup> de  $\varphi$ .

Dérivons maintenant les équations d'Euler-Lagrange.

### 1.2.3 Le principe de moindre action - L'équation d'Euler-Lagrange

Soit  $V$  un volume de l'espace-temps délimité par une surface  $\Sigma$ .

$$S_V[\varphi] = \int_V d^D x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad (1.30)$$

Le principe de moindre action s'énonce ainsi : étant donnée la valeur du champ sur  $\Sigma$ , le champ physique est celui qui minimise l'action dans le volume  $V$ . Ceci implique que  $S_V$  soit

<sup>15</sup>On appelle fonctionnelle une fonction d'un ensemble de fonctions vers  $\mathbb{R}$ .

$$I : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.28)$$

$$f \mapsto I[f] \quad (1.29)$$

Par exemple,  $I[f] = \int_{\mathbb{R}} dt f(t)$  est une fonctionnelle de  $f$ . De même,  $I_{x_0}[f] = f(x_0)$  qui envoie une fonction sur sa valeur en un point  $x_0$  est une fonctionnelle de  $f$ .



stationnaire par rapport à un changement de champ à l'intérieur de  $V$  au voisinage du champ physique  $\varphi_0$  :

$$S_V[\varphi_0] = S_V[\varphi_0 + \delta\varphi] + O(\delta\varphi^2) \quad (1.31)$$

avec  $\delta\varphi(x) = 0$  si  $x \in \Sigma$ . De là, nous allons déduire les équations du mouvement de  $\varphi_0$  :

$$\delta S = S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] \quad (1.32)$$

$$= \int_V \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta\varphi \right) + O(\delta\varphi^2) \quad (1.33)$$

Par intégration par parties, il vient :

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta\varphi = - \int \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi + \int \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) \quad (1.34)$$

Le dernier terme est l'intégrale d'une dérivée (d'une divergence) qui est donc aussi, par le théorème de Stokes, l'intégrale du flux de  $\partial \mathcal{L} / \partial(\partial_\mu \varphi) \delta\varphi$  sur la surface  $\Sigma$ . Or, sur  $\Sigma$ ,  $\delta\varphi(x)$  est nulle par hypothèse et ce terme est donc nul. Il reste :

$$\delta S = \int_V \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi + O(\delta\varphi^2) \quad (1.35)$$

Demander que  $S$  soit stationnaire au premier ordre pour le champ physique, pour tout  $\delta\varphi(x)$ , implique donc :

$$\boxed{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right)_{\varphi = \varphi_{\text{physique}}} = 0}$$

qui est l'équation d'Euler-Lagrange. C'est une généralisation des équations du même nom pour une particule :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1.36)$$

et qui sont vérifiées sur la trajectoire physique de la particule.

### 1.2.4 Exemples de Klein-Gordon et de Dirac

Les lagrangiens de Klein-Gordon et de Dirac sont les lagrangiens les plus simples que l'on puisse imaginer tout en étant non triviaux, fonction respectivement d'un champ de spin 0 (scalaire) et de spin 1/2 (spinoriel). On verra que, dans le cas quantique, ils correspondent à des particules de spin 0 et 1/2 respectivement, qui sont libres. Ils sont quadratiques dans les champs.

**Équation de Klein-Gordon.** Pour avoir un scalaire de Lorentz fait avec  $\partial_\mu \varphi$  au plus quadratique en  $\partial_\mu$  et en  $\varphi$ , on a comme seule possibilité :  $\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ . Le lagrangien le plus général quadratique en  $\varphi$  et  $\partial_\mu$  est donc :

$$\boxed{\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2}$$

Le  $1/2$  devant le terme  $(\partial\varphi)^2$  correspond à un choix de normalisation de  $\varphi$  commode pour la suite. Une fois fait ce choix, le coefficient devant  $\varphi^2$  ne peut pas être ajusté : il est fixé de façon inamalgable. On choisit de l'écrire  $-1/2m^2$  pour la commodité ultérieure des calculs. Le signe  $-$  trouve sa justification dans la suite où l'on verra que  $m$  a la signification de la masse de la particule.

Les équations du mouvement correspondant à  $\mathcal{L}_{KG}$  se calculent trivialement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi \end{cases} \Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \Rightarrow \boxed{(\square + m^2)\varphi = 0}$$

C'est l'équation de Klein-Gordon.

**Équation de Dirac.** Les arguments du lagrangien sont, dans ce cas,<sup>16</sup>  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi})$ . Avec  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  on peut faire les termes quadratiques suivants :

- un scalaire  $\bar{\psi}\psi$  ;
- un vecteur  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ .

Pour faire un scalaire à partir de  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , on peut :

- le contracter avec lui-même :  $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)$  mais ça n'est plus quadratique en  $\psi$ . C'est un terme d'interaction ;
- le contracter avec  $\partial_\mu$  :  $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ .

Le lagrangien quadratique en  $\psi$  le plus général et hermitique à une intégration par parties près est dit lagrangien de Dirac :

$$\boxed{\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi}$$

où l'on a introduit la notation « slash de Feynman » :

$$\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu \tag{1.37}$$

Le  $i$  est là pour assurer la réalité (l'hermiticité) de  $\mathcal{L}_D$ . Pour des champs qui sont à valeurs sur les complexes :

$$(\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^* = (\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger \tag{1.38}$$

$$= (i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger \tag{1.39}$$

$$= -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi \tag{1.40}$$

$$= -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{car} \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad \text{et} \quad (\gamma^0)^2 = 1 \tag{1.41}$$

Il reste à intégrer par parties :

$$\int (\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = \int \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{1.42}$$

<sup>16</sup> $\psi$  est ici supposé non hermitique : c'est un spineur de Dirac. Dans ce cas,  $\bar{\psi}$  est une quantité (algébriquement) indépendante de  $\psi$  : on ne peut pas calculer *algébriquement* les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe en fonction de ce seul nombre. Il faut aussi le complexe conjugué :  $\Re(z) = (z + z^*)/2$  et  $\Im(z) = (z - z^*)/2i$ . Du coup, pour obtenir les équations d'Euler-Lagrange pour les parties réelle et imaginaire de  $\psi$ , il faut obtenir celles pour  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  (qui sont reliées par conjugaison mais qui sont algébriquement indépendantes).

L'action est donc bien réelle.

### Exercices

---

1. On considère une théorie à  $n$  champs scalaires  $\varphi_i$ . On demande que cette théorie soit invariante sous le groupe  $SO(n)$  agissant sur les  $\varphi_i$  par :

$$\varphi'_i = \sum_j R_{ij} \varphi_j \quad (1.43)$$

où  $R$  est une matrice de  $SO(n)$  :  ${}^t R = R^{-1}$ .

- Écrire le lagrangien le plus général quadratique dans les  $\varphi_i$  et invariant sous Lorentz et sous  $SO(n)$ .
  - Qu'est-ce qui changerait si l'on ne demandait plus l'invariance  $SO(n)$  ?
  - Trouver une écriture sympathique où l'invariance  $SO(n)$  est explicite.
  - Écrire les équations du mouvement.
2. Réécrire  $\mathcal{L}_D$  en explicitant tous les indices. On pose  $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ .  $\not{k}$  est-il un nombre, un vecteur, une matrice ? Est-il vrai que  $\not{k} = k_\mu \gamma^\mu$  ? Montrer que  $\not{k}^2 = k^2$ . Cette écriture est un peu abusive. Pourquoi ? Écrire les équations d'Euler-Lagrange pour  $\mathcal{L}_D$  et celle de Dirac avec tous les indices.
3. On reprend l'exercice 1 ci-dessus pour  $n = 2$ . On pose :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \quad (1.44)$$

Réécrire le lagrangien en fonction de  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  et leurs dérivées premières. Montrer que l'invariance  $SO(2)$  sur  $\varphi$  est réalisée par  $\varphi' = e^{-i\theta}\varphi$ . On rappelle que les matrices de  $SO(2)$  sont paramétrisables par :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et que le lagrangien est, de façon évidente, invariant sous cette transformation.

---

On voit donc que  $\mathcal{L}_D$  n'est pas « vraiment » hermitique puisqu'il faut faire une intégration par parties pour retrouver sur le  $\mathcal{L}_D$  initial. Pour pouvoir traiter symétriquement  $\psi$  et  $\bar{\psi}$  et avoir un lagrangien vraiment hermitique, il peut être parfois agréable de symétriser  $\mathcal{L}_D$  :

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu - m)\psi \quad (1.45)$$

$$= \bar{\psi}\left(\frac{1}{2}i\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - m\right)\psi \quad (1.46)$$

avec les notations :

- $\bar{\psi}\overleftarrow{\partial}_\mu = \partial_\mu\bar{\psi}$  (« action à gauche »)
- $f\overleftrightarrow{\partial}g = f(\partial g) - (\partial f)g$

Avec une forme ou l'autre on peut calculer les équations du mouvement, et donc l'équation de Dirac :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i(\not{\partial} - m)\psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(i\not{\partial} - m)\psi = 0} \quad (1.47)$$

Exercice

---

Écrire les équations d'Euler-Lagrange avec  $\psi$  et montrer que l'équation de Dirac obtenue (pour  $\bar{\psi}$ ) est conjuguée de celle de  $\psi$ .

---

La simplicité de la mise en oeuvre de la symétrie de Lorentz n'est pas le seul intérêt de la formulation lagrangienne. Elle fournit également une construction simple des quantités conservées associées aux symétries. Ceci passe par...

### 1.3 Le théorème de Noether

Il est bien connu que l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie, et l'invariance par translation celle de l'impulsion. On peut rendre systématique la construction des quantités conservées associées aux symétries. C'est ce que fait le théorème de Noether.

Notons  $D$  la dimension de l'espace-temps et commençons par prouver un...

#### 1.3.1 Lemme

Posons :

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) \quad (1.48)$$

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (1.49)$$

Alors :

$$\int_{V'} d^D x' \mathcal{L}(x') = \int_V d^D x \mathcal{L}(x + \delta x) \left| \frac{D(x')}{D(x)} \right| \quad (1.50)$$

où le volume  $V'$  est l'image de  $V$  par la transformation  $x' = x + \delta x$ . On a introduit le jacobien :

$$\left| \frac{D(x')}{D(x)} \right| = \begin{vmatrix} 1 + \partial_0 \delta x^0 & \partial_0 \delta x^1 & \dots \\ \partial_1 \delta x^0 & 1 + \partial_1 \delta x^1 & \dots \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

$$= 1 + \partial_0 \delta x^0 + \partial_1 \delta x^1 + \dots + O(\delta x^2) \quad (1.52)$$

$$= 1 + \partial_\mu \delta x^\mu + O(\delta x^2) \quad (1.53)$$

On en déduit :

$$\int_{V'} d^D x' \mathcal{L}(x') = \int_V d^D x (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) (\mathcal{L}(x) + \delta x^\nu \partial_\nu \mathcal{L}) + O(\delta x^2) \quad (1.54)$$

et donc finalement :

$$\int_{V'} d^D x' \mathcal{L}(x') = \int_V d^D x \mathcal{L}(x) + \int_V d^D x \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) + O(\delta x^2). \quad (1.55)$$

### 1.3.2 Énoncé du théorème de Noether - Courant conservé

Imaginons maintenant que nous transformions par une opération de symétrie infinitésimale les coordonnées et/ou les champs<sup>17</sup> :

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} & \text{variation des coordonnées} \\ \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x) & \text{variation fonctionnelle des champs} \end{cases} \quad (1.56)$$

où  $\delta x^{\mu}$  et  $\delta\varphi$  sont supposés être du même ordre dans les paramètres de la transformation considérée. On a donc infinitésimalement :

$$\varphi'(x') = \varphi'(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \varphi'(x) \quad (1.57)$$

$$= \varphi(x) + \delta\varphi(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} \varphi(x) \quad (1.58)$$

Voyons deux exemples, celui des translations et celui des transformations de Lorentz<sup>18</sup> :

– **Translation**<sup>19</sup>

$$\begin{cases} x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \\ \varphi'(x') = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu} \\ \delta\varphi(x) = -\varepsilon^{\mu} \partial_{\mu} \varphi \quad (= i\varepsilon^{\mu} (i\partial_{\mu} \varphi)) \end{cases} \quad (1.59)$$

– **Transformation de Lorentz**<sup>20</sup>

On considère un champ  $\phi(x)$  à  $n$  composantes engendrant une représentation (irréductible) du groupe de Lorentz (voir page 1.2.1) :

$$\begin{cases} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ \varphi'(x') &= \varphi(x) - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \varphi(x) \end{cases} \quad (1.60)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta x^{\mu} &= \varepsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ \delta\varphi(x) &= -\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} ((x^{\mu} i\partial^{\nu} - x^{\nu} i\partial^{\mu}) + S^{\mu\nu}) \varphi(x) \\ &= -\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}) \end{cases} \quad (1.61)$$

Revenons au cas général. Pour que la transformation considérée soit une *symétrie*, il faut que l'action soit invariante :

$$\int_{V'} d^D x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_{\mu} \varphi'(x')) = \int_V d^D x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_{\mu} \varphi(x)) \quad (1.62)$$

Or, d'après notre petit lemme :

$$\int_{V'} d^D x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_{\mu} \varphi'(x')) = \int_V d^D x \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial_{\mu} \varphi'(x)) + \int_V \partial_{\mu} (\mathcal{L}(\varphi', \partial\varphi') \delta x^{\mu}) \quad (1.63)$$

<sup>17</sup>La variation fonctionnelle des champs correspond à la variation de la fonction elle-même et doit donc être évaluée pour le même jeu d'arguments  $x^{\mu}$ .

<sup>18</sup>Petite remarque générale sur les différentes transformations possibles :

- Translation : affecte les coordonnées, pas les champs. C'est donc égal à l'identité pour les champs (penser à un espace affine : dans l'espace vectoriel qui le sous-tend, les translations sont égales à l'identité).
- Transformation de jauge : change les champs, pas les coordonnées.
- Rotation et boost : changent les champs et les coordonnées.

<sup>19</sup>Rappelons que, pour une translation, le nouveau champ au nouveau point est égal à l'ancien champ à l'ancien point. Il suffit pour s'en convaincre de prendre le champ électrique entre les plaques de deux condensateurs traduits l'un par rapport à l'autre.

<sup>20</sup>Ici, contrairement aux translations, le nouveau champ au nouveau point est « tourné » par rapport à l'ancien champ à l'ancien point et  $S^{\mu\nu}/2$  est le générateur des transformations de Lorentz dans la représentation (matricielle) adaptée à la nature tensorielle de  $\varphi$ , voir la section 1.2.1.

Donc :

$$\forall V, \int_V d^D x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right) = 0 \quad (1.64)$$

puisque, au premier ordre,  $\mathcal{L}(\varphi', \partial_\mu \varphi') \delta x^\mu = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \delta x^\mu$  (on note  $\mathcal{L}$  pour  $\mathcal{L}(\phi, \partial \phi)$ ). Pour tout volume  $V$  on a donc :

$$\int_V d^D x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta \varphi \right) + \int_V d^D x \partial_\mu \left( \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi \right) = 0 \quad (1.65)$$

Le premier terme s'annule *pour le champ physique* d'après les équations du mouvement. Il reste :

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{avec} \quad J^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi$$

Arrive enfin le théorème de Noether : à toute symétrie continue est associé un courant  $J^\mu$  conservé.<sup>21</sup>

Tel quel,  $J^\mu$  n'est pas très joli car il fait intervenir les quantités infinitésimales  $\delta x^\mu$  et  $\delta \varphi$  qui ne sont d'ailleurs pas « indépendantes », puisqu'elles dépendent du(des) même(s) paramètre(s) infinitésimal(aux) de la transformation. Nous allons soigner cela dans la suite.

Voyons ce qu'il en est pour les translations et les transformations de Lorentz.

### 1.3.3 Invariance par translation - Conservation de l'impulsion

L'application du théorème donne d'après (1.59) :

$$J^\mu = \mathcal{L} \varepsilon^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} (-\varepsilon^\nu \partial_\nu \varphi) \quad (1.66)$$

$$= \varepsilon^\rho \left( \mathcal{L} \delta^\mu_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\rho \varphi \right) \quad (1.67)$$

$$\text{Posons} \quad J^\mu \triangleq -\varepsilon^\rho \theta^\mu_\rho. \quad (1.68)$$

$J^\mu$  étant conservé pour tout  $\varepsilon^\mu$  et  $\varepsilon^\mu$  étant indépendant de  $x$ ,  $\theta_{\mu\nu}$  est conservé aussi. On en déduit :<sup>22</sup>

$$\theta_{\mu\nu} \triangleq -\mathcal{L} \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi \quad \text{avec} \quad \partial^\mu \theta_{\mu\nu} = 0$$

$\theta_{\mu\nu}$  est appelé *tenseur énergie-impulsion*.<sup>23</sup> Pour la suite, on définit la *charge conservée* associée :

<sup>21</sup>Les symétries discrètes ne relèvent pas du théorème de Noether. Il ne leur est pas associé de quantité conservée.

<sup>22</sup>Le tenseur métrique de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  apparaît dans  $\theta_{\mu\nu}$  car l'écriture précédente faisait intervenir des tenseurs mixtes (une fois covariant et une fois contravariant). Ne pas oublier que  $\eta^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ .

<sup>23</sup>On définit aussi dans la littérature un « improved energy-momentum tensor » à partir de  $\theta_{\mu\nu}$ , et qui a des propriétés plus agréables. On remarquera qu'il n'y a pas, dans le cas des translations, qu'un seul courant conservé mais bien quatre :  $\theta_{\mu 0}, \dots, \theta_{\mu 3}$ , un pour chaque direction  $t, x, y, z$ . De même, il n'y a pas qu'une charge conservée, mais quatre : les  $P_\mu$  (voir la suite).

$$P_\nu \triangleq \int d^3\vec{x} \theta_\nu^0$$

On va montrer dans la suite que :

$$\frac{dP_\nu}{dt} = 0$$

ce qui explique que les  $P_\mu$  soient appelées des quantités conservées. On définit le moment conjugué de  $\varphi$  par analogie avec la mécanique de la particule<sup>24</sup>, où  $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}$  par :

$$\Pi(x) \triangleq \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} \quad (1.69)$$

et la charge conservée s'écrit donc :

$$P_\mu = \int d^3\vec{x} \left( \Pi \partial_\mu\varphi - \mathcal{L} \delta_\mu^0 \right)$$

En particulier :

$$P_0 = \int d^3\vec{x} (\Pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) \quad (1.70)$$

et son intégrand est la transformée de Legendre de  $\mathcal{L}$  par rapport à  $\partial_0\varphi$ . Il dépend de  $\varphi$ ,  $\Pi$  et  $\vec{\nabla}\varphi$  (mais plus de  $\partial_0\phi$ ) car :

$$dP_0 = \int \left( \Pi d\dot{\varphi} + \dot{\varphi} d\Pi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi)} d\dot{\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)} d(\partial_i\varphi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} d\varphi \right) \quad (1.71)$$

$$= \int \left( \dot{\varphi} d\Pi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)} d(\partial_i\varphi) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} d\varphi \right) \quad (1.72)$$

$P_0$  est l'analogie du hamiltonien d'un système à  $N$  particules :

$$H = \sum_{i=1}^N (p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}) \quad (1.73)$$

à ceci près qu'il y a maintenant un nombre infini continu de degrés de liberté.  $P_0$  est donc l'énergie du champ, et  $\vec{P}$  son impulsion.  $P_\mu$  est conservée, comme il fallait s'y attendre, quand il y a invariance par translation dans le temps et dans l'espace.

Est-ce pour autant le générateur des translations dans le temps et dans l'espace comme on est en droit de s'y attendre? La réponse est oui dans le cas classique.<sup>25</sup>  $H = P^0$  génère, via les crochets de Poisson, l'évolution dans le temps et  $\vec{P}$  les translations dans l'espace.

On a donc le résultat général suivant :

*Les charges conservées (issues de Noether) associées à une symétrie sont les générateurs de cette symétrie.*<sup>26</sup>

<sup>24</sup>Pour une particule libre  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  et donc  $p = m\dot{x}$ .

<sup>25</sup>Dans le cas quantique galiléen, il est montré pages 57 et suivantes de « Un soupçon de théorie des groupes » que les quantités conservées sont les générateurs des groupes de symétrie amenant à la loi de conservation.

<sup>26</sup>Voir « Un soupçon de théorie des groupes ».

Précisons un peu et anticipons sur la suite. Pour prendre l'exemple de  $P_\mu$ , une translation sur les champs  $\varphi$  et  $\Pi$  doit changer  $\varphi(x)$  et  $\Pi(x)$  en  $\varphi(x+a)$  et  $\Pi(x+a)$ . En posant par définition (voir la suite pour plus de détails) :

$$U(a) = e^{ia^\mu P_\mu^{\text{gen}}} \quad (1.74)$$

avec  $U$  l'« opérateur de translation » et  $P_\mu^{\text{gen}}$  le « générateur des translations », on doit avoir (voir la suite, équation (1.108) page 30) :

$$U^\dagger(a)\varphi(x+a)U(a) = \varphi(x) \quad (1.75)$$

dans le cas où  $\varphi(x)$  est un champ quantique (et idem pour  $\Pi(x)$ ). Ceci implique :

$$[P_\mu^{\text{gen}}, \varphi(x)] = -i\partial_\mu\varphi(x) \quad (1.76a)$$

$$[P_\mu^{\text{gen}}, \Pi(x)] = -i\partial_\mu\Pi(x) \quad (1.76b)$$

ce qui constitue la définition du générateur des translations  $P_\mu^{\text{gen}}$ .<sup>27</sup> Comme d'autre part  $\varphi$  et  $\Pi$  sont les briques élémentaires de notre construction de la théorie des champs, les  $P_\mu^{\text{gen}}$  doivent eux-mêmes être déterminés en fonction des  $\varphi$  et  $\Pi$  (les translations ne sont pas réalisées de façon « extrinsèques » au système). C'est là que le théorème de Noether est très utile : il nous fournit des quantités conservées associées à la symétrie de translation :

$$P_\mu^{\text{Noether}} = \int d^3\vec{x} \theta_\mu^0 \quad (1.77)$$

qui sont, par construction, des fonctions de  $\varphi$  et  $\Pi$  et dont on peut montrer, en toute généralité, qu'ils vérifient les relations de commutation (1.76a) et (1.76b), une fois que l'on a choisi les « bonnes » relations de commutation entre les champs :<sup>28</sup>

$$P_\mu^{\text{gen}} = P_\mu^{\text{Noether}}(\varphi, \Pi) \quad (1.79)$$

Le théorème de Noether nous procure donc à la fois les quantités conservées sous les symétries et les générateurs de ces symétries.

### 1.3.4 Invariance par transformation de Lorentz homogène

On pourrait recommencer tout cela avec les transformations de Lorentz. On trouverait un tenseur conservé  $\mathcal{M}^{\mu\nu\rho}$  et une charge conservée  $M^{\mu\nu}$  :

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = x^\nu\theta^{\mu\rho} - x^\rho\theta^{\mu\nu} - i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}S^{\nu\rho}\varphi \quad (1.80)$$

$$\partial_\mu\mathcal{M}^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (1.81)$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^3\vec{x} \mathcal{M}^{0\mu\nu} \quad (1.82)$$

<sup>27</sup>Dans le cas classique, il ne s'agit pas de commutateurs mais de crochets de Poisson.

<sup>28</sup>De nouveau, dans le cas classique, la relation :

$$\{\varphi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.78)$$

où  $\{\dots, \dots\}$  désigne le crochet de Poisson, assure automatiquement l'égalité entre charges conservées et générateurs. Dans le cas quantique, la structure algébrique des crochets de Poisson doit être remplacée par des relations de commutation entre champs et moments conjugués, inconnues a priori. Le point non trivial est que le choix soit de commutateurs soit d'anti-commutateurs conduit, dans le cas quantique, à la relation  $P_\mu^{\text{gen}} = P_\mu^{\text{Noether}}$  : il n'y a pas qu'une façon de « quantifier » les champs ! Ceci est un bout du théorème « spin-statistique » et sera revu en détail dans la suite.



On remarque que la charge conservée est antisymétrique dans ses deux indices. Les trois générateurs des boosts sont :

$$K^i \triangleq M^{0i} \quad (1.83)$$

et ceux des rotations :

$$J_i \triangleq \varepsilon_{ijk} M^{jk} \quad (1.84)$$

On a par exemple  $J_z = \int d^3\vec{x} (x\mathcal{P}_y - y\mathcal{P}_x)$ , où  $\mathcal{P}_i$  est la densité d'impulsion.

### 1.3.5 Conservation des charges de Noether

Nous allons finalement montrer que les charges de Noether définies par :

$$Q(t) \triangleq \int_V d^3\vec{x} J^0(\vec{x}, t) \quad (1.85)$$

sont des quantités conservées.

L'idée est strictement la même que pour la charge électrique :<sup>29</sup> l'intégrale sur un volume  $V$  de la densité de charge  $\rho = J^0$  est la charge contenue dans  $V$ . Si aucun flux de charge ne sort de  $V$ , la charge dans  $V$  est constante.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V d^3\vec{x} \partial_0 J^0 \quad (1.86)$$

$$= - \int_V d^3\vec{x} \partial_i J^i \quad (1.87)$$

$$= - \int_{\Sigma} d^2\vec{n} \cdot \vec{J} \quad (1.88)$$

$$= \text{flux de } J^i \text{ à travers } \Sigma. \quad (1.89)$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{si rien ne sort de } V}$$

C'est le cas par exemple si  $V = \mathbb{R}^3$  : la charge totale est conservée. Comme on l'a vu, la charge de Noether pour les translations est l'impulsion, si bien que pour un système isolé :

$$\frac{dP_\mu}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad P_\mu = \int d^3\vec{x} \left( \Pi \partial_\mu \varphi - \mathcal{L} \delta^0_\mu \right) \quad (1.90)$$

### 1.3.6 Préliminaires au cas quantique

Tout comme dans le cas classique, on aura besoin dans le cas quantique du hamiltonien et parfois du générateur des translations. Peuvent-ils s'obtenir dans ce cas par la même construction, à la Noether, que dans le cas classique ? Plus précisément :

$$P_\mu = \int d^3\vec{x} \left( \Pi \partial_\mu \varphi - \mathcal{L} \delta^0_\mu \right) \quad (1.91)$$

<sup>29</sup>Et pour cause ! Le courant électromagnétique  $j^\mu$  vérifiant  $\partial_\mu j^\mu = 0$  est un courant conservé de Noether associé à l'invariance de jauge  $U(1)$  de l'électromagnétisme. La charge électrique, définie comme l'intégrale de  $\rho = j^0$  est, pour cette raison, une quantité conservée.

où cette fois  $\varphi$  et  $\Pi$  sont des champs d'opérateurs, est-il le générateur des translations ? Telle quelle, la question est mal posée tant que l'on ne s'est pas donné l'algèbre de ces opérateurs.<sup>30</sup> Dans le cas galiléen, tout était plus simple car le modèle de la particule (sans spin) était tel que les opérateurs  $(\vec{X}, \vec{P})$  formaient l'ensemble irréductible des opérateurs : le générateur des translations  $\vec{P}$  faisait donc partie des données du problème et l'algèbre des translations imposait l'algèbre des opérateurs (voir la suite page 28) :

$$[X_i, P_j] = i\delta_{ij} \quad (1.92)$$

Dans le cas des champs, c'est plus compliqué puisque le (candidat) générateur  $P_\mu^{\text{Noether}}$  est une fonction de  $\varphi$  et  $\Pi$  et n'est donc pas une donnée première de la théorie. Nous verrons qu'il y a deux choix, et seulement deux, d'algèbres de commutation des  $\varphi$  et des  $\Pi$  pour que  $P_\mu$  soit le générateur des translations : remplacer les crochets de Poisson par  $(-i$  fois) le commutateur ou l'anti-commutateur. En fait, suivant le spin, une seule possibilité sera finalement viable : commutateurs pour les spins entiers et anti-commutateurs pour les spins demi-entiers. C'est le théorème spin-statistique (voir la suite) qui relie le spin d'une particule à sa statistique quantique : Bose-Einstein ou Fermi-Dirac.

Il nous faut maintenant préciser tout cela et passer au cas quantique.

## 1.4 Les champs quantiques libres

### 1.4.1 Qu'est-ce qu'une théorie quantique ?

Rappelons-le, il n'y a qu'une théorie quantique avec ses axiomes de base et plusieurs modèles à l'intérieur de cette théorie (pas de « première » et encore moins de « seconde » quantification). Le modèle de la particule à spin où les opérateurs fondamentaux sont  $(\vec{X}, \vec{P}, \vec{S})$  est, comme nous l'avons déjà dit, mal adapté à la description relativiste de Lorentz car, d'une part, avoir ainsi un formalisme covariant est difficile avec ces opérateurs, et, d'autre part, il n'est pas commode de décrire la création et l'annihilation de particules ainsi. En fait, le modèle est valable tant que l'on ne dispose pas de l'énergie suffisante pour créer d'autres particules. En d'autres termes, on s'attendra à ce que *la théorie des champs dégénère en la mécanique quantique de la particule si l'on peut supposer que le nombre de particules ne varie pas.*

Nous devons garder la quintessence de la théorie quantique et construire le « modèle » des champs quantiques. Nous devons donc nous poser la question suivante : « Qu'est-il nécessaire de définir pour avoir une théorie quantique complètement déterminée ? »

Réponse : cinq choses.

1. un espace des états ;
2. un ensemble irréductible d'opérateurs fondamentaux, c'est à dire le jeu minimal d'opérateurs à partir desquels tous les autres peuvent être construits (ne pas confondre avec un ensemble complet d'opérateurs qui commutent, ça n'a rien à voir) ;
3. les relations de commutation entre les opérateurs de l'ensemble irréductible ;
4. les équations d'évolution des opérateurs (représentation de Heisenberg) ou des vecteurs d'état (représentation de Schrödinger), donc un hamiltonien. Ce dernier doit être hermitique afin que la théorie soit unitaire et posséder un état fondamental afin d'assurer la stabilité de la théorie. Dans ce contexte, cet état fondamental est appelé le « vide » ;

<sup>30</sup>Dans le cas classique, cette algèbre est donnée par le crochet de Poisson  $\{\varphi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$  La question est donc de savoir quelle structure algébrique va prendre la place de celle-ci. Pour une particule classique,  $\{x, p\} = 1$  et pour une particule quantique,  $[X, P] = i$ .

5. une théorie causale.

Passons rapidement en revue ces points pour les particules galiléennes :

1. L'espace des états est dans cas un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  ou un produit tensoriel de tels espaces, un pour chaque particule (s'il y en a plusieurs). Si les particules sont de même nature, l'indiscernabilité et la relation spin-statistique imposent que seuls les produits symétrisés ou antisymétrisés d'états soient physiques, suivant le caractère entier ou demi-entier du spin.
2. À chaque particule on associe les opérateurs  $(\vec{X}_i, \vec{P}_i, \vec{S}_i)$  agissant dans  $\mathcal{H}_i$ . Cet ensemble est irréductible en ce sens qu'il est minimal et que toutes les observables associées aux particules sont des fonctions de ces  $3N$  opérateurs (ex : les moments cinétiques  $\vec{J}_i = \vec{X}_i \wedge \vec{P}_i + \vec{S}_i$ ).
3. Les relations de commutation entre opérateurs irréductibles sont dictées par les symétries du système. Pour les translations par exemple, imposons le « principe de correspondance » qui consiste à imposer que la valeur moyenne quantique de la position se transforme comme la position classique <sup>31</sup> :

$$\langle \psi | \vec{X} | \psi \rangle_{O'} = \langle \psi | \vec{X} | \psi \rangle_O + \vec{a} \quad (1.93)$$

où  $O$  et  $O'$  sont deux observateurs distants de  $\vec{a}$ .

Comment passer d'un observateur à l'autre ? Soit  $U(\vec{a})$  l'opérateur unitaire représentant les translations dans l'espace des états et faisant donc passer des kets  $|\psi\rangle_O$  utilisés par  $O$  pour décrire l'état du système aux kets  $|\psi\rangle_{O'}$  utilisés par  $O'$  :

$$|\psi\rangle_{O'} = U(\vec{a})|\psi\rangle_O \quad (1.94)$$

Comme nous avons choisi de transformer les kets, nous pouvons prendre le *même* opérateur  $\vec{X}$  comme opérateur de position pour les deux observateurs :

$$\vec{X}_O = \vec{X}_{O'} \quad (1.95)$$

On en déduit :

$$\langle \psi | U^\dagger(\vec{a}) \vec{X} U(\vec{a}) | \psi \rangle = \langle \psi | \vec{X} | \psi \rangle + \vec{a} \quad (1.96)$$

Appelons  $\vec{P}$  le générateur des translations, que l'on choisit hermitique. Alors, par définition, pour une translation infinitésimale  $d\vec{a}$  puis pour une translation finie  $\vec{a}$  :

$$U(d\vec{a}) = 1 - id\vec{a} \cdot \vec{P} + O(d\vec{a}^2) \quad \Rightarrow \quad U(\vec{a}) = e^{-i\vec{a} \cdot \vec{P}} \quad (1.97)$$

Choisissons comme axe des  $x$  l'axe  $OO'$ . On arrive finalement à deux expressions pour la position  $\langle \psi | U(da)^\dagger X U(da) | \psi \rangle$ , l'une donnée ci-dessus et l'autre calculée à partir de  $P_x$  :

$$\langle \psi | U(da)^\dagger X U(da) | \psi \rangle = \langle \psi | X | \psi \rangle - \langle \psi | i da [X, P_x] | \psi \rangle \quad (1.98)$$

$$= \langle \psi | X | \psi \rangle + da \quad (1.99)$$

Cette relation étant vraie pour tout  $|\psi\rangle$  et tout  $da$ , on en déduit que pour que  $P_x$  soit le générateur des translations, il doit vérifier :

<sup>31</sup>Pour plus de détails sur toute cette partie, voir « Un soupçon de théorie des groupes » pages 55 à 60.

$$\boxed{[X, P_x] = i}$$

On peut montrer que les autres générateurs de Galilée sont des fonctions de  $\vec{X}$ ,  $\vec{P}$  et  $\vec{S}$ , et que :

$$[\vec{X}, \vec{S}] = [\vec{P}, \vec{S}] = 0 \quad (1.100)$$

pour que l'algèbre de Galilée soit satisfaite.<sup>32</sup>

4. La donnée d'un hamiltonien compatible avec les symétries du problème, ayant un fondamental, dicte la dynamique via l'équation de Schrödinger.

Dans le cas des champs, ça se complique un peu. Reprenons les points précédents.

1. **L'espace des états de la théorie des champs.** On veut pouvoir décrire des processus pour lesquels le nombre de particules varie. Considérons pour l'instant un univers où il n'y aurait qu'un seul type de particule, et où l'espace des états d'une particule est un espace de Hilbert noté  $\mathcal{H}$  (ne pas confondre ce  $\mathcal{H}$  avec l'hamiltonien). L'espace des états d'un système à  $n$  particules est alors, symboliquement :

$$\mathcal{H}^n \triangleq \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \cdots \otimes \mathcal{H} \quad (n \text{ fois}) \quad (1.101)$$

sachant qu'en fait il faudrait symétriser ou antisymétriser les états suivant que le spin est entier ou demi-entier.<sup>33</sup>

Pour pouvoir accommoder une situation où  $n$  varie, il faut donc considérer l'espace, dit de Fock, où tous les nombres de particules sont représentés. Il s'agit donc de la somme directe des puissances tensorielles de  $\mathcal{H}$  quand  $n$  varie entre 0 et l'infini.

$$\mathcal{F} = \underbrace{|0\rangle}_{\text{vide}} \oplus \underbrace{\mathcal{H}}_{1 \text{ particule}} \oplus \underbrace{\mathcal{H}^2}_{2 \text{ particules}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\mathcal{H}^n}_{n \text{ particules}} \oplus \cdots \quad (1.102a)$$

$$= \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}^n \quad (1.102b)$$

Un système peut avoir des composantes sur des états à nombres de particules différents. C'est pour cela qu'on utilise une somme directe et non pas seulement le produit tensoriel entre les espaces. D'autre part, dans la somme infinie il ne faut retenir que les puissances tensorielles symétrisées (bosons) ou antisymétrisées (fermions).

Par exemple, pour un univers fait d'électrons, de positrons et de photons, un ket d'état possible pour un système est :<sup>34</sup>

$$|\psi\rangle = A_1|e^-e^+\rangle + A_2|\gamma\gamma\rangle + A_3|e^-e^-e^+e^+\rangle + A_4|e^-e^+\gamma\gamma\rangle + \dots \quad (1.103)$$

où les  $A_i$  sont les amplitudes pour trouver le système dans l'état  $i$ . Ainsi, contrairement au cas galiléen, on ne connaît en général pas de façon certaine le contenu en particules du système. Par exemple, dans une diffusion  $e^+$  sur  $e^-$ , l'état final peut être deux photons, ou  $e^+e^-$ , ou  $e^-e^+\gamma\gamma$ , etc. Remarquons que la conservation de la charge impose que tous les états finals possibles aient même charge (règle de « super-sélection »).

<sup>32</sup>Voir « Un soupçon de théorie des groupes... ».

<sup>33</sup>Signalons que le spin n'est pas, malgré certaines idées reçues, d'origine relativiste, sauf pour les particules de masse nulle (car leur vitesse est toujours  $c$ ). Il est lié aux rotations, en tant que moment cinétique de la particule dans son référentiel propre (où  $\vec{L} = \vec{0}$ ). Comme les rotations sont un sous-groupe de Lorentz, le spin apparaît *aussi* en relativité.

<sup>34</sup>L'écriture de  $|\psi\rangle$  n'est pas très correcte car en plus de la nature des particules ( $|e^+e^-$  par exemple), il faudrait spécifier l'état de ces particules. Par exemple,  $|e^-, k, \uparrow; e^+, k', \downarrow\rangle$  pour des états d'onde plane et de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$ . Les amplitudes  $A_i$  sont elles aussi fonctions de l'état des particules. Par exemple,  $A_1(k, k')$ .

2. **L'ensemble irréductible des opérateurs en théorie des champs.** C'est l'analogue de  $(\vec{X}, \vec{P}, \vec{S})$  du modèle galiléen de la particule. Nous supposons l'existence d'un champ d'opérateurs  $\varphi(x)$  et de son moment conjugué  $\Pi(x)$  (qui sera défini en fonction de  $\varphi$  et  $\partial\varphi$  par  $\Pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\varphi)$  une fois donné un lagrangien). *Toutes les grandeurs physiques opératoriels seront, par hypothèse, des fonctions de  $\varphi$  et  $\Pi$ .* C'est en cela que l'ensemble  $(\varphi, \Pi)$  est irréductible. Pour l'instant, hormis le cas du champ électromagnétique, l'hypothèse que l'ensemble irréductible des opérateurs d'une théorie quantique et relativiste est donné par des champs semble arbitraire. Un peu de patience.
3. **L'algèbre des champs.** Comme dans le cas de la particule galiléenne (cf. page 28), c'est l'exigence d'obtenir une théorie possédant des symétries d'espace-temps prescrites à l'avance (Poincaré ici) qui dictera les relations de commutation des champs  $\varphi$  et  $\Pi$ . Concrètement, elles seront posées pour que le  $P_\mu(\varphi, \Pi)$  donné par Noether soit le générateur des translations (on montrerait qu'alors il n'y a pas de problème pour que le  $M_{\mu\nu}(\varphi, \Pi)$  de Noether soit le générateur des boosts et des rotations).
4. **La dynamique des champs.** Elle sera fixée par le choix d'un lagrangien. On supposera en effet que les champs quantiques vérifient également un principe de moindre action ou, dit autrement, que la dynamique des champs quantiques (opérateurs) est donnée par les équations d'Euler-Lagrange, dans lesquelles on remplace les  $\varphi$  et les  $\Pi$  classiques par les opérateurs  $\varphi$  et  $\Pi$ . Ceci ne pose aucune difficulté formelle (à part un problème d'ordre des opérateurs dont nous reparlerons). On pose ce principe au niveau quantique en espérant évidemment prendre le bon principe qui nous donnera à la limite classique le principe de moindre action classique que l'on sait marcher remarquablement bien.<sup>35</sup> Quant au choix de  $\mathcal{L}$ , il sera fixé "à 90%" par des considérations de symétrie, Poincaré bien sûr mais aussi jauge. La renormalisabilité (on en reparlera) et les choix physiques divers feront le reste. Évidemment, à partir de  $\mathcal{L}$ , on peut construire le hamiltonien  $\mathcal{H}$  et en déduire de façon équivalente la dynamique.  $\mathcal{H}$  possède bien sûr en plus toute l'information sur *le spectre de la théorie*. En particulier, ce spectre doit être borné inférieurement pour qu'il existe *un état fondamental*.

Il est maintenant temps de revenir sur le point 2 et de voir à l'œuvre la symétrie de Lorentz sur des champs quantiques.

### 1.4.2 Transformations sous le groupe de Poincaré des champs quantiques

Pour un champ classique, on a, lors d'une transformation passive de Poincaré (voir section 1.2.1) :

$$\varphi'(x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu) = D(\Lambda)\varphi(x) \quad \text{pour une transformation de Lorentz} \quad (1.104)$$

$$\varphi'(x' = x + a) = \varphi(x) \quad \text{pour une translation} \quad (1.105)$$

où  $\varphi$  est un champ scalaire, spinoriel ou quadrivectoriel (etc) et  $D(\Lambda)$  la matrice représentant la transformation de Lorentz de paramètres  $\Lambda^\mu_\nu$ , dans la représentation engendrée par  $\varphi$ . (1.104) doit donc se lire en général :

$$\varphi'_\alpha(x') = D_\alpha^\beta \varphi_\beta(x) \quad (1.106)$$

<sup>35</sup>Dans la formulation par « l'intégrale fonctionnelle » de la théorie des champs, le principe de moindre action classique est retrouvé par une méthode assez différente, ce qui rend ces deux méthodes assez complémentaires de ce point de vue.

Notre « principe de correspondance » consiste en physique quantique à imposer cela sur les valeurs moyennes :

$$\langle \varphi(x') \rangle' = D(\Lambda) \langle \varphi(x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle \Pi(x') \rangle' = D(\Lambda) \langle \Pi(x) \rangle$$

On a, comme d'habitude en physique quantique, le choix de transformer les kets et pas les opérateurs ou le contraire (ou même un mélange des deux). On choisit, comme dans le cas galiléen, *de transformer les kets sans changer les opérateurs*. Ceci signifie donc que deux observateurs, transformés de Lorentz l'un par rapport à l'autre, utilisent le même jeu de champs d'opérateurs mais pas les mêmes kets d'états et qu'il existe un opérateur de Wigner  $U$  faisant passer des kets de l'un aux kets de l'autre (cf. « Un soupçon de théorie des groupes... », chapitre 3, section III).

$$\forall |\psi\rangle, |\psi'\rangle = U(\Lambda, a) |\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \psi' | \varphi(x') | \psi' \rangle = D(\Lambda) \langle \psi | \varphi(x) | \psi \rangle$$

Remarque : nous sommes en représentation de Heisenberg. Ce sont les opérateurs qui dépendent du temps, et non les kets :  $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$ .

On déduit de ce qui précède :

$$U^\dagger \varphi(x') U = D \varphi(x)$$

À titre d'exercice, il est bon de réécrire cette formule en explicitant tous les indices :

$$U^\dagger(\Lambda, a) \varphi_\alpha(x) U(\Lambda, a) = D_\alpha^\beta \varphi_\beta(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (1.107)$$

où  $\alpha$  indice le multiplet d'opérateurs,  $S_\alpha^\beta$  et  $\Lambda$  sont des matrices numériques,  $U$  un opérateur,  $x$  et  $a$  des quadrivecteurs.

**Pour les translations :**

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + a^\mu \\ |\psi'\rangle = U(a) |\psi\rangle \end{cases} \quad \Rightarrow \quad U^\dagger(a) \varphi(x + a) U(a) = \varphi(x) \quad (1.108)$$

Et idem pour le moment conjugué  $\Pi(x)$ . Par définition du générateur des translations dans l'espace de Minkowski :

$$U(a) \triangleq e^{ia^\mu P_\mu} \quad (1.109)$$

On a donc, pour une translation infinitésimale :

$$(1 - iP^\mu da_\mu) (\varphi(x) + da^\mu \partial_\mu \varphi(x)) (1 + ida^\mu P_\mu) = \varphi(x) \quad (1.110)$$

$$\Rightarrow \quad [P_\mu, \varphi(x)] = -i\partial_\mu \varphi(x) \quad \text{et} \quad [P_\mu, \Pi(x)] = -i\partial_\mu \Pi(x) \quad (1.111)$$

Ceci est la *définition* du générateur des translations (revoir la discussion page 28). Or, d'après

notre hypothèse d'irréductibilité de l'ensemble  $(\varphi, \Pi)$ , et comme  $P_\mu$  est un opérateur,  $P_\mu$  doit être une fonction de  $\varphi$  et  $\Pi$ . Il n'est pas évident a priori que :

$$P_\mu^{\text{Noether}} = \int d^3x (\Pi \partial_\mu \varphi - \mathcal{L} \delta^0_\mu) \quad (1.112)$$

fasse l'affaire. Wait and see...

**Pour les transformations de Lorentz :**

$$\begin{cases} x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ |\psi'\rangle = U(\Lambda)|\psi\rangle \end{cases} \quad (1.113)$$

Par définition du générateur des transformations de Lorentz, dans le cas infinitésimal :<sup>36</sup>

$$U(\Lambda) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (1.114)$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu \quad (1.115)$$

Alors

$$U^\dagger(\Lambda) \varphi_\alpha(\Lambda x) U(\Lambda) = D_\alpha^\beta(\Lambda) \varphi_\beta(x). \quad (1.116)$$

Dans le cas infinitésimal :

$$D_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})_\alpha^\beta. \quad (1.117)$$

et donc, en se servant de  $x = \Lambda^{-1} \cdot x'$  :

$$\left(1 + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right) \varphi_\alpha(x) \left(1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}\right) = \left(\delta_\alpha^\beta - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (S^{\mu\nu})_\alpha^\beta\right) \varphi_\beta(x^\rho - \varepsilon^\rho_\sigma x^\sigma). \quad (1.118)$$

On en déduit

$$\boxed{[M^{\mu\nu}, \varphi_\alpha(x)] = - (L^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta + (S^{\mu\nu})_\alpha^\beta) \varphi_\beta(x)} \quad (1.119)$$

avec

$$L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu). \quad (1.120)$$

De nouveau, il n'est pas évident que le  $M_{\mu\nu}^{\text{Noether}}$  fasse l'affaire.

### Remarques

- Il ne faut pas confondre  $P_\mu = P_\mu(\varphi, \Pi)$  — donné par le théorème de Noether — et  $P_\mu = -i\partial_\mu$ , il ne s'agit pas du « même »  $P_\mu$  ! Le seul  $P_\mu$  qui ait un sens en tant qu'opérateur agissant dans l'espace de Fock est le  $P_\mu(\varphi, \Pi)$ . En tant que générateur des translations, il est le *représentant dans l'espace de Fock* de  $-i\partial_\mu$  qui est le générateur des translations dans l'espace des fonctions de  $x$  (que ces fonctions soient ou non des opérateurs) :  $P_\mu(\varphi, \Pi)$  agit sur des kets  $|\psi\rangle$  et  $-i\partial_\mu$  sur des champs. Comme on a choisi de ne pas transformer les champs quantiques,  $\varphi$  est invariant et les relations :

$$\begin{cases} [P_\mu, \varphi] = -i\partial_\mu \varphi \\ [P_\mu, \Pi] = -i\partial_\mu \Pi \end{cases} \quad (1.121)$$

<sup>36</sup>Attention  $M^{\mu\nu}$  est un tenseur (antisymétrique) dont chaque composante est un opérateur agissant dans l'espace de Fock.

sont à interpréter comme *des contraintes sur la fonction*  $P_\mu(\varphi, \Pi)$ , *et qui en fait la déterminent.*

Bien sûr, si l'on avait décidé de changer les champs et non les kets, on aurait eu :

$$\delta\varphi = a^\mu [P_\mu, \varphi] \quad (1.122)$$

$$= -ia^\mu \partial_\mu \varphi \quad (1.123)$$

que l'on réécrit souvent symboliquement  $a^\mu P_\mu \varphi$  au lieu de  $a^\mu [P_\mu, \varphi]$ .

- Pour avoir une symétrie, et donc en particulier l'invariance de Poincaré, il faut d'autre part (en représentation de Heisenberg) que :<sup>37</sup>

$$\frac{dU}{dt}(\Lambda, a) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dP_\mu}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dM_{\mu\nu}}{dt} = 0 \quad (1.124)$$

Si les  $P_\mu^{\text{Noether}}$  et  $M_{\mu\nu}^{\text{Noether}}$  font l'affaire quant à leurs relations de commutation avec les  $\varphi$  et  $\Pi$ , cette seconde condition sera *automatiquement vérifiée* puisqu'il s'agit de charges de Noether conservées. *C'est évidemment la raison pour laquelle les charges de Noether sont les seules candidates naturelles pour jouer le rôle de générateurs des symétries.*

### 1.4.3 Relations de commutation canoniques à temps égaux

Nous sommes maintenant armés pour choisir des relations algébriques entre les  $\varphi$  et les  $\Pi$  de telle façon que  $P_\mu^{\text{Noether}}$  et  $M_{\mu\nu}^{\text{Noether}}$  soient les générateurs de Poincaré. Commençons par  $P_\mu$  et calculons  $[P_\mu, \varphi(x)]$  :

$$[P_\mu^{\text{Noether}}, \varphi(x)] = \int d^3\vec{x}' \left[ \Pi(\vec{x}', t) \partial_\mu \varphi(\vec{x}', t) - \mathcal{L}(\vec{x}', t) \delta_\mu^0, \varphi(\vec{x}, t) \right] \quad (1.125)$$

où, par commodité, nous avons choisi le même temps  $t$  dans les deux membres du commutateur, ce qui est loisible puisque  $dP_\mu/dt = 0$ . Ensuite :

$$[P_\mu^{\text{Noether}}, \varphi(x)] = \int d^3\vec{x}' \left( [\Pi(x') \partial_\mu \varphi(x'), \varphi(x)]^\equiv - \delta_\mu^0 [\mathcal{L}(x'), \varphi(x)]^\equiv \right) \quad (1.126)$$

où la notation  $[\dots]^\equiv$  désigne un commutateur « à temps égaux ». On se sert de :

$$[A, BC] = [A, B]C - B[C, A] \quad (1.127)$$

- Pour  $\mu = i = 1, 2, 3$ .

$$[P_i^{\text{Noether}}, \varphi(x)] = \int d^3\vec{x}' \left( [\Pi(x'), \varphi(x)]^\equiv \partial_i \varphi(x') - \Pi(x') [\varphi(x), \partial_i \varphi(x')]^\equiv \right) \quad (1.128)$$

Or :

$$[\varphi(x), \partial_i \varphi(x')]^\equiv = \frac{\partial}{\partial x'^i} [\varphi(x), \varphi(x')]^\equiv \quad (1.129)$$

Pour trouver  $-i\partial_i \varphi(x)$  il est naturel de prendre :

$$\begin{cases} [\varphi(x), \Pi(x')]^\equiv = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\varphi(x), \varphi(x')]^\equiv = 0 \end{cases} \quad (1.130)$$

<sup>37</sup>Voir par exemple « Un soupçon de théorie des groupes... ».



– Pour  $\mu = 0$ .

Nous considèrerons dans la suite le cas particulier (qui est aussi le cas important) où :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - V(\varphi) \quad (1.131)$$

où  $V$  est appelé le potentiel et est supposé développable en puissances du champ. Dans ce cas,  $\Pi = \partial_0\varphi$  et

$$[\varphi(x), \mathcal{L}(\varphi(x'), \Pi(x'))]^\equiv = [\varphi(x), \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2(x')]^\equiv \quad (1.132)$$

$$= i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\partial_0\varphi \quad (1.133)$$

On réunit tous les termes et on obtient :

$$[P_0, \varphi(x)] = \int d^3\vec{x}' [\Pi(x'), \varphi(x)]^\equiv \partial_0\varphi(x') \quad (1.134)$$

Avec le choix précédent de commutateurs, on arrive à :

$$[P_0, \varphi(x)] = -i\partial_0\varphi(x) \quad (1.135)$$

Ça marche!

Pour avoir en plus  $[P_\mu, \Pi] = -i\partial_\mu\Pi$ , il suffit d'ajouter la relation :

$$[\Pi(x), \Pi(x')]^\equiv = 0 \quad (1.136)$$

En résumé, si l'on prend :

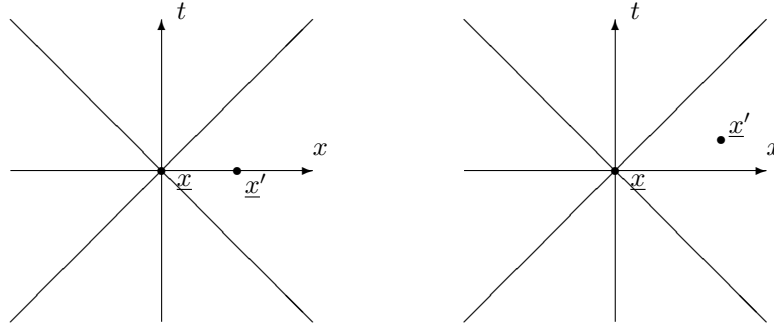
$$\boxed{\begin{cases} [\varphi(x), \varphi(x')]^\equiv = [\Pi(x), \Pi(x')]^\equiv = 0 \\ [\varphi(x), \Pi(x')]^\equiv = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \end{cases}}$$

alors la théorie quantique obtenue en remplaçant les champs classiques par des champs d'opérateurs dans le lagrangien, le hamiltonien, les équations d'Euler-Lagrange, les courants et charges de Noether est bien invariante de Lorentz!<sup>38</sup>

Remarques diverses :

1. Le fait que les relations de commutation canoniques ne fassent intervenir qu'un seul temps et du coup un  $\delta^{(3)}(\dots)$  au lieu d'un  $\delta^{(4)}(\dots)$  pourrait paraître choquant dans le cadre relativiste. En fait, il n'en est rien car :
  - le commutateur n'est non-nul que pour  $\vec{x} = \vec{x}'$ . Or, si dans un repère  $t = t'$  et  $\vec{x} = \vec{x}'$ , il en est de même dans tous les repères (les événements sont confondus).
  - le commutateur est nul pour  $t = t'$  et  $\vec{x} \neq \vec{x}'$  et donc pour les événements séparés par un intervalle du genre espace. Dans ce cas, ce qui est simultané dans un repère ne l'est pas dans un autre, et la covariance de la théorie impliquera comme on le verra (dans le cas des champs libres) que le commutateur entre  $\varphi(x)$  et  $\Pi(x')$  est nul si  $x$  et  $x'$  sont reliés par un intervalle quelconque du genre espace.

<sup>38</sup>Se souvenir que l'invariance vient de ce qu'en représentation de Heisenberg les générateurs du groupe doivent non seulement vérifier l'algèbre du groupe, ce qui est automatique s'ils transforment les champs correctement :  $[P_\mu, \varphi] = -i\partial_\mu\varphi$  et  $[M_{\mu\nu}, \varphi] = -(x^\mu i\partial^\nu - x^\nu i\partial^\mu) + S^{\mu\nu} \varphi$ , mais ils doivent en outre être indépendants du temps, ce qui est automatique aussi si ce sont les charges de Noether.



Gauche :  $[\varphi(\underline{x}), \Pi(\underline{x}')] = 0$  avec  $\underline{x} \neq \underline{x}'$ .  
 Droite :  $[\varphi(\underline{x}), \Pi(\underline{x}')] = 0$  avec  $(\underline{x} - \underline{x}')^2 < 0$ .

Le fait que tous les commutateurs entre les champs soient nuls pour des événements non causalement reliés est ce qui en dernière analyse assure la causalité de la théorie<sup>39</sup>. On appelle *microcausalité* cette condition d'annulation des commutateurs.

2. Si l'on avait raisonné en représentation de Schrödinger, on aurait considéré des champs  $\varphi_S(\vec{x})$  et  $\Pi_S(\vec{x})$  d'opérateurs qui auraient été les analogues dans le cas continu des opérateurs  $X_S^i$  et  $P_S^i$  de la physique quantique galiléenne. Dans ce cadre, le passage de  $[X_S^i, P_S^i] = i\delta^{ij}$  à  $[\varphi_S(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$  aurait semblé naturel. Ensuite, en passant à la représentation de Heisenberg,  $(O_H(t) \triangleq e^{iHt} O_S e^{-iHt})$ , on aurait obtenu pour des champs :

$$\forall t, \quad [X_H^i(t), P_H^j(t)] = i\delta^{ij} \quad (1.137)$$

et donc naturellement :

$$[\varphi_H(x), \Pi_H(x')] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.138)$$

3. On a donc trouvé que le truc consistant à remplacer les crochets de Poisson classiques par  $(-i)$  fois le commutateur marche pour nous produire une théorie invariante sous Poincaré : ceci n'exprime, bien entendu, rien d'autre que la structure (de groupe) sous-jacente de nos symétries.<sup>40</sup> Mais existe-t'il une (ou plusieurs) autre(s) structure(s) algébrique(s) que le commutateur pour faire cela? La réponse est oui : il existe au moins les anti-commutateurs  $\{A, B\} = AB + BA$  (ne pas confondre avec les crochets de Poisson). Le choix :

$$\begin{cases} \{\varphi(x), \varphi(x')\} = \{\Pi(x), \Pi(x')\} = 0 \\ \{\varphi(x), \Pi(x')\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \end{cases} \quad (1.139)$$

nous produirait *aussi* une théorie invariante sous Poincaré! Est-ce inquiétant ou extraordinaire? Quel choix allons-nous faire? Réponse : le spin choisira pour nous et dans tous les cas il n'y aura qu'une solution physiquement viable (existence d'un état fondamental, par exemple).

<sup>39</sup>Notons du même coup que c'est la raison pour laquelle seul le commutateur à temps égaux entre  $\varphi$  et  $\partial_0\varphi$  est non trivial puisque c'est le seul qui relie le champ entre deux événements causalement reliés  $\varphi(t, \vec{x})$  et  $\varphi(t + dt, \vec{x})$

<sup>40</sup>On dit souvent, ce faisant, qu'on a « quantifié » la théorie. Certes, vu sous l'angle anthropomorphique, c'est bien ce qui s'est passé. Mais la nature, elle, n'est que quantique. Elle ne sait que « déquantifier » les choses qui, dans certaines limites, nous apparaissent classiques. Alors méfiance, le chemin du classique vers le quantique n'est pas unique!

4. Quid des autres générateurs  $M_{\mu\nu}$ ? On verra que du moment que ça marche pour  $P_\mu$ , ça marchera pour  $M_{\mu\nu}$ .

Il est maintenant temps d'étudier cas par cas, où plutôt spin par spin, les champs quantiques : Klein-Gordon, Dirac, Maxwell...

## 1.5 Le champ scalaire libre

### 1.5.1 Introduction

Pourquoi étudier les particules de spin 0? Après tout, on ne connaît pas à l'heure actuelle de particules *élémentaires* de spin 0. Néanmoins :

- beaucoup de particules composées de quarks sont de spin 0, les pions par exemple. Une théorie des champs pour décrire la physique des pions à *basse énergie* (là où on peut les considérer comme élémentaires) est tout à fait viable,
- le mécanisme de brisure spontanée de symétrie dans sa version « mécanisme de Higgs » nécessite des champs scalaires et le modèle de Weinberg Salam en contient donc,
- l'étude des transitions de phase en mécanique statistique se fait avec des champs scalaires (et une théorie euclidienne car à l'équilibre thermodynamique il n'existe aucune dépendance en temps, par définition),
- les théories supersymétriques associent à chaque fermion de spin 1/2 un ou plusieurs compagnon(s) scalaire(s).
- finalement, le fait même qu'aux énergies actuellement accessibles on ne détecte pas de particule scalaire<sup>41</sup> est une énigme que les théories ne peuvent ignorer et qui a probablement des raisons profondes partiellement expliquées aujourd'hui grâce à la théorie de la renormalisation (problème de la hiérarchie).

Comme le champ scalaire est aussi l'exemple le plus simple de champ, il ne faut pas hésiter à l'étudier. Commençons par...

### 1.5.2 Le champ scalaire hermitique libre

On cherche donc à construire une théorie dont les champs fondamentaux sont : un champ scalaire hermitique  $\varphi(x)$  (tel que  $\varphi^\dagger = \varphi$ ) et son moment conjugué  $\Pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\varphi)$ . L'exemple le plus simple de lagrangien hermitique, fonction de  $\varphi$  et  $\partial_\mu\varphi$ , invariant de Lorentz<sup>42</sup> est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu\varphi \partial^\mu\varphi - \frac{1}{2} m^2\varphi^2$$

On a donc les équations :

$$\begin{cases} (\square + m^2)\varphi = 0 & \text{équation d'Euler Lagrange} \\ \Pi = \partial_0\varphi & \text{moment conjugué} \end{cases}$$

<sup>41</sup>Sauf peut-être le Higgs.

<sup>42</sup>On utilisera souvent la notation suivante pour le carré minkowskien :

$$(\partial\varphi)^2 \equiv \partial_\mu\varphi \partial^\mu\varphi \tag{1.140}$$

**Solution de l'équation de Klein-Gordon.** On place le système dans une boîte de volume fini  $V$  (c'est un peu plus simple, parfois très commode, voire fondamental, et en plus pédagogique). On peut toujours faire  $V \rightarrow \infty$  à la fin des calculs, si bien que ce cas apparaît comme un cas limite. Il ne faut de toute façon pas oublier que pas mal de problèmes physiques se passent dans de vraies boîtes (en physique du solide, en particulier), qu'en principe la physique sur notre planète est indépendante de ce qui se passe sur Alpha du Centaure et que finalement *les calculs faits sur ordinateur le sont toujours à volume fini*.<sup>43</sup> On va de plus imposer des conditions périodiques dans  $V$ .

Une base de fonctions propres de  $\square$  est formée des  $e^{ikx}$  :<sup>44</sup>

$$\square e^{ikx} = -k^2 e^{ikx} \quad (1.141)$$

où  $k^2$  est le carré minkowskien de  $k$ . L'existence de conditions périodiques impose que le spectre des  $\vec{k}$  admissibles est discret (le vérifier) :

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L} \quad n_i \in \mathbb{Z} \text{ et } V = L^3 \quad (1.142)$$

L'équation de Klein-Gordon étant linéaire, une solution quelconque (transformable de Fourier) peut s'écrire comme une superposition de solutions de :

$$(\square + m^2)e^{ikx} = 0 \quad (1.143)$$

Cette équation impose que les  $k$  admissibles vérifient :

$$-k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 0 \quad (1.144)$$

On pose par définition :

$$\omega_{\vec{k}} \triangleq +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

On doit donc avoir  $k_0 = \pm\omega_{\vec{k}}$  pour que  $e^{ikx}$  soit solution. Les  $k$  admissibles sont donc :

$$k^\pm = \left( \frac{\pm\omega_{\vec{k}}}{\vec{k}} \right) \quad (1.145)$$

La solution générale de l'équation de Klein-Gordon est donc, pour  $\varphi$  hermitique :

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \left( A_+(\vec{k}) e^{i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\vec{x})} + A_-(\vec{k}) e^{i(-\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\vec{x})} + \text{h.c.} \right) \quad (1.146)$$

où « h.c. » signifie hermitique conjugué. On peut alléger l'écriture en remarquant que  $\sum_{\vec{k}} = \sum_{-\vec{k}}$  et donc que :

$$\sum_{\vec{k}} A_-(\vec{k}) e^{-i(\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\vec{x})} = \sum_{\vec{k}} A_-(\vec{k}) e^{-i(\omega_{\vec{k}}t - \vec{k}\vec{x})} \quad (1.147)$$

On a alors :

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \left( (A_-(\vec{k}) + A_+^\dagger(\vec{k})) e^{-ikx} + (A_-^\dagger(\vec{k}) + A_+(\vec{k})) e^{ikx} \right) \quad (1.148)$$

<sup>43</sup>Noter que, formellement, la présence d'une boîte brise l'invariance de Lorentz et de translation. Pour  $V$  beaucoup plus grand que tous les systèmes que l'on examine, ceci « n'a pas d'importance ».

<sup>44</sup>A condition qu'on se limite aux fonctions (en fait distributions) transformables de Fourier. C'est là l'espace des fonctions sur lequel est bâti la théorie quantique des champs.

où l'on se restreint maintenant aux  $k$  dont la composante temporelle est positive :  $k = \begin{pmatrix} + \\ \vec{k} \end{pmatrix}$ . On réécrit finalement  $\varphi(x)$  sous la forme commode pour la suite :

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} (a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx}) \quad (1.149)$$

Pour l'instant, tant que l'on n'a pas imposé les relations de commutation canoniques à temps égaux, on ne sait rien des  $a_{\vec{k}}$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger$ . Mais patience...

On déduit l'expression de  $\Pi(x)$  :

$$\Pi(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_{\vec{k}} -i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}} (a_{\vec{k}} e^{-ikx} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx}) \quad (1.150)$$

#### Exercice

---

Il est important de voir le calcul de  $\varphi$  et  $\Pi$  « dans le continu », i.e. à  $V \rightarrow \infty$ . On pose par définition de  $\tilde{\varphi}$  :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \tilde{\varphi}(k) \quad (1.151)$$

- Quelle contrainte la condition de réalité de  $\varphi$  impose-t-elle sur  $\tilde{\varphi}$  ?
- Trouver l'équation vérifiée par  $\tilde{\varphi}$ .
- En se souvenant que l'équation  $(a+x)\tilde{f}(x) = 0$  a comme solution, au sens des distributions,  $\tilde{f}(x) = \delta(a+x)\tilde{f}(x)$ , trouver  $\varphi(x)$  en fonction de  $\tilde{\varphi}(k)$ , où  $\tilde{\varphi}(k)$  s'obtient à partir de  $\tilde{\varphi}(k)$ .
- Quelle tête a la « surface »  $k^2 = m^2$  dans l'espace  $(k^0, k^1, k^2, k^3)$  ? Combien de nappes a-t-elle ? Où sont-elles placées par rapport au cône de lumière ?
- Dédurre de tout cela que l'on peut scinder l'intégrale donnant  $\varphi(x)$  en deux, l'une faisant intervenir  $\theta(k_0)$ , l'autre  $\theta(-k_0)$ .
- Que vaut  $\delta(x^2 - a^2)$  en fonction de  $\delta(x-a)$  et  $\delta(x+a)$  ? Finir le calcul, pour aboutir à :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} (a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx})$$

avec  $a_{\vec{k}} = \tilde{\varphi}(-\omega_{\vec{k}}, -\vec{k}) = \tilde{\varphi}^*(\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger = \tilde{\varphi}(\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$ .

---

« **Quantification** » du champ de Klein-Gordon Jusqu'à maintenant, tout ce que l'on a fait était tout aussi valable pour un champ réel que pour un champ d'opérateurs. C'est le choix des relations de commutation qui va fixer leur nature d'opérateur. Faisons pour commencer le choix des commutateurs canoniques à temps égaux :

$$\begin{cases} [\varphi(x), \Pi(x')]^{\overline{=}} &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\varphi(x), \varphi(x')]^{\overline{=}} &= [\Pi(x), \Pi(x')]^{\overline{=}} = 0 \end{cases} \quad (1.152)$$

Ce choix va induire une algèbre des  $a_{\vec{k}}$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger$ . Ceux-ci étant les coefficients de Fourier de  $\varphi$  et  $\Pi$ , ils peuvent s'obtenir à partir des champs par transformée de Fourier inverse :

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} = \int_V d^3\vec{x} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} (\omega_{\vec{k}}\varphi(0, \vec{x}) + i\Pi(0, \vec{x})) \\ a_{\vec{k}}^\dagger = \int_V d^3\vec{x} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} (\omega_{\vec{k}}\varphi(0, \vec{x}) - i\Pi(0, \vec{x})) \end{cases}$$

Ces équations sont indépendantes du temps : on a pris  $t = 0$ , mais un  $t$  quelconque aurait fait l'affaire.

### Exercices

---

1. Montrer que :

$$a_{\vec{k}} = i \int_V d^3\vec{x} \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x) \quad (1.153)$$

avec  $f \overleftrightarrow{\partial} g = f\partial g - (\partial f)g$ .

2. (*Exercice fondamental. À faire*). À partir des expressions de  $a_{\vec{k}}$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger$ , montrer que l'algèbre de  $\varphi$  et  $\Pi$  implique que :

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \cdot 1$$

3. De même, montrer qu'en volume infini, en se servant de l'exercice page 37, on a :

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$


---

On peut, par le même genre de calculs que ceux de l'exercice précédent, montrer que :

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0$$

En conclusion, pour chaque mode  $\vec{k}$ , les  $a_{\vec{k}}$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger$  sont des opérateurs de création et d'annihilation (de l'oscillateur harmonique). Ainsi :

Dans l'espace des  $\vec{k}$ , les valeurs permises de  $\vec{k}$  forment un réseau cubique :  $k_i = n_i \cdot 2\pi/L$

avec  $n_i \in \mathbb{Z}$ , et pour chaque valeur permise on a un jeu d'opérateurs de création et d'annihilation  $(a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}}^\dagger)$ .

Dans l'espace des  $\vec{x}$ , l'interprétation de  $\varphi(x)$  ne semble pourtant pas aller complètement de soi. Il va falloir travailler un peu sur cette assemblée d'oscillateurs pour comprendre de quoi il retourne. Et commençons par répondre à deux questions que l'on s'était posées initialement : nature de l'espace des états, hamiltonien et spectre de la théorie.

**L'espace des états - Espace de Fock du champ scalaire** On a donc un ensemble d'oscillateurs harmoniques dans l'espace des  $\vec{k}$ , un pour chaque mode  $\vec{k} = 2\pi/L\vec{n}$ . Tous ces oscillateurs harmoniques sont « indépendants », puisque :

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (1.154)$$

Cela signifie que l'espace des états total est le produit tensoriel des espaces des états correspondant à chacun des oscillateurs.

Passons brièvement en revue le cas d'un oscillateur harmonique. L'espace des états dans ce cas est engendré très commodément par la base  $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle, \dots\}$  qui est la base propre de l'opérateur (hermitique) « nombre d'occupation » :

$$N \triangleq a^\dagger a \quad \text{avec} \quad N|n\rangle = n|n\rangle \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.155)$$

Ces différents vecteurs s'obtiennent par l'action répétée de  $a^\dagger$  sur l'état « vide »  $|0\rangle$  :

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \Rightarrow \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle \quad (1.156)$$

On a de plus :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (1.157)$$

Ceci est évidemment compatible avec  $[a, a^\dagger] = 1$  (le vérifier). Pour un oscillateur harmonique ordinaire, on effectue le changement de variables habituel :

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( X + \frac{i}{m\omega} P \right) \\ a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( X - \frac{i}{m\omega} P \right) \end{cases} \quad (1.158)$$

et on a alors :

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 \quad (1.159)$$

$$= \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (1.160)$$

$$\boxed{H = \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega}$$

si bien que les états propres de  $N$  sont aussi ceux de  $H$ . Ainsi, dire que le système est dans son  $n$ -ième état excité est équivalent à dire qu'il est dans un état à  $n$  quanta d'excitation.

Revenons maintenant au cas du champ quantique. Pour chaque mode  $\vec{k}$ , on a donc un espace de Hilbert engendré par :

$$\{|0, \vec{k}\rangle, |1, \vec{k}\rangle, \dots, |n, \vec{k}\rangle, \dots\} \quad (1.161)$$

et donc pour l'ensemble des oscillateurs, une base de l'espace des états est obtenue à partir des vecteurs :

$$|n_1, \vec{k}_1\rangle \otimes |n_2, \vec{k}_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_p, \vec{k}_p\rangle \otimes \dots \quad (1.162)$$

lorsque chacun des indices ( $n_p$ ) varient sur tout  $\mathbb{N}$ . On note le ket précédent de façon plus commode :

$$|n_1, \vec{k}_1 ; n_2, \vec{k}_2 ; \dots ; n_p, \vec{k}_p ; \dots\rangle \quad (1.163)$$

et, dans la pratique, on ne fait apparaître que les  $n_i$  différents de 0. On a :

$$\boxed{|n_1, \vec{k}_1 ; n_2, \vec{k}_2 \dots\rangle = \frac{(a_{\vec{k}_1}^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_{\vec{k}_2}^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots |0\rangle}$$

où  $|0\rangle$  est le vecteur à 0 quantum dans tous les modes  $\vec{k}$ .

Remarquons que comme les  $a_{\vec{k}_i}^\dagger$  commutent entre eux pour tout  $\vec{k}_i$ , l'ordre dans lequel sont rangés les  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots$  n'a pas d'importance. Par exemple :

$$|1, \vec{k}_1 ; 1, \vec{k}_2\rangle = a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger |0\rangle \quad (1.164)$$

$$= a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_1}^\dagger |0\rangle \quad (1.165)$$

$$|1, \vec{k}_1 ; 1, \vec{k}_2\rangle = |1, \vec{k}_2 ; 1, \vec{k}_1\rangle \quad (1.166)$$

De plus, tous ces quanta d'excitation, à  $\vec{k}$  donné, sont *indiscernables*. L'état  $|n, \vec{k}\rangle$  est un état à  $n$  quanta d'impulsion  $\vec{k}$ . Il serait faux de leur attacher une « individualité » et de parler du premier quantum d'impulsion  $\vec{k}$ , du second, etc.

Il est temps maintenant de voir à quoi correspondent ces quanta.

**Le hamiltonien et l'impulsion de Klein-Gordon - Les particules** Le hamiltonien est donné par le théorème de Noether :

$$H = P_0 = \int d^3\vec{x} (\Pi \partial_0\varphi - \mathcal{L}) \quad (1.167)$$

$$= \int d^3\vec{x} \left[ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} \left( \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 - m^2\varphi^2 \right) \right] \quad (1.168)$$

$$H = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left( (\partial_t\varphi)^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right) \quad (1.169)$$

Classiquement,  $H$  est positif puisque c'est une somme de carrés (c'est l'origine du signe – de  $-\frac{1}{2}m^2\varphi^2$  dans  $\mathcal{L}$ ). Quantiquement, il faut remplacer  $\varphi$  par son expression en fonction de  $a_{\vec{k}}$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger$ . On obtient (exercice fondamental : le prouver) :

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k}} \left( N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega_{\vec{k}}}$$



avec  $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .

Remarques :

- Il n'y a aucun couplage entre les impulsions. On verra que cela signifie que le champ est libre.
- $N_{\vec{k}}$  étant un opérateur positif, il en va de même pour  $H$ . Il existe donc un état fondamental obtenu pour  $n_i = 0$  pour tout  $i$ , c'est le vide de quanta qui est aussi le « vide » du hamiltonien :  $|0\rangle$ .

$$|0\rangle = |0, \vec{k}_1 ; 0, \vec{k}_2 ; \dots\rangle \quad (1.170)$$

$$H|0\rangle = \left( \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}} \right) |0\rangle \quad (1.171)$$

$$= E_0 |0\rangle \quad (1.172)$$

- L'état  $|n_1, \vec{k}_1 ; n_2, \vec{k}_2 ; \dots\rangle$  est état propre de  $H$  avec l'énergie propre :

$$E = E_0 + n_1 \omega_{\vec{k}_1} + n_2 \omega_{\vec{k}_2} + \dots \quad (1.173)$$

- Les états d'impulsion<sup>45</sup> nulle  $|n, \vec{k} = \vec{0}\rangle$  ont pour énergie :

$$E_n = E_0 + n \omega_{\vec{0}} = E_0 + n.m \quad (= E_0 + n.mc^2) \quad (1.174)$$

Ceci est un résultat fondamental. Il nous indique que le spectre à  $\vec{k} = \vec{0}$  est fait d'états *équi-espacés en énergie*,<sup>46</sup> la distance entre deux états étant  $m$  (ou  $mc^2$  en unités habituelles). En fait, le premier état excité du système est d'énergie  $m$ . De cet état naît une infinité d'états d'énergie  $\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$ . « Puis » il y a un état d'énergie  $2m$  duquel naît une infinité (double) d'états d'énergie  $\sqrt{m^2 + \vec{k}_1^2} + \sqrt{m^2 + \vec{k}_2^2}$ , et ainsi de suite.

Calculons maintenant l'impulsion de ces états.

L'impulsion est donnée par le théorème de Noether :

$$P_i = \int d^3 \vec{x} \Pi \partial_i \varphi \quad (1.175)$$

En réexprimant cela en fonction des  $a$  et  $a^\dagger$ , on trouve (exercice : le montrer) :

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} N_{\vec{k}} \vec{k} \quad (1.176)$$

On a donc :

$$\vec{P} |n_1 \vec{k}_1 ; n_2 \vec{k}_2 \dots\rangle = (n_1 \vec{k}_1 + n_2 \vec{k}_2 + \dots) |n_1 \vec{k}_1 ; n_2 \vec{k}_2 \dots\rangle \quad (1.177)$$

Les états propres de  $H$  sont donc aussi ceux de  $\vec{P}$ . On a :

$$\vec{P} |1, \vec{k}\rangle = \vec{k} |1, \vec{k}\rangle \quad (1.178)$$

$$H |1, \vec{k}\rangle = E_0 + \omega_{\vec{k}} |1, \vec{k}\rangle \quad (1.179)$$

Donc, au terme  $E_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}/2$  près (on en reparlera dans la suite, c'est une constante), l'état  $|1, \vec{k}\rangle$  apparaît comme un paquet d'énergie  $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$  et d'impulsion  $\vec{k}$ . Tout colle pour interpréter cela comme suit :

<sup>45</sup>On verra en toute rigueur que les  $\vec{k}$  peuvent effectivement s'interpréter comme des impulsions.

<sup>46</sup>Évidemment, c'est le fait que sont apparus dans notre formalisme des oscillateurs harmoniques qui assure cela. Un oscillateur harmonique est un système dont le spectre est équi-espacé. Ceci pourrait presque en être la définition !

- $|0\rangle$  est un état à zéro particule.
- $|1, \vec{k}\rangle$  est un état à une particule de masse  $m$  et d'impulsion  $\vec{k}$  ayant l'énergie  $\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .
- $|n_1, \vec{k}_1; n_2, \vec{k}_2 \dots\rangle$  est un état à  $n_1$  particules d'impulsion  $\vec{k}_1$ , etc, et d'énergie égale à la somme des énergies de chacune des particules.

De là, plusieurs commentaires :

1. Une chose est assez extraordinaire dans cette théorie : *nous n'avons jamais imposé l'existence des particules !* Nous sommes partis des principes quantiques et de la symétrie de Poincaré, et ceci nous a conduit, via les champs, aux particules qui apparaissent comme des paquets d'énergie et d'impulsion. C'est un grand progrès par rapport à la mécanique quantique galiléenne où rien n'obligeait à considérer des particules (modèles des rotateurs ou des toupies quantiques en physique moléculaire). Le rêve de Démocrite trouve ici son aboutissement, et ceci demandait la physique quantique et Lorentz ! On « verra » (trop brièvement) dans la suite qu'une autre prédiction non triviale découle de notre formalisme : l'existence d'anti-particules.<sup>47</sup>
2. Les particules décrites par notre théorie sont *libres*. Ceci se voit sur l'état à  $n$  particules d'impulsions  $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n$  : il est stationnaire. Aucune particule n'est créée ou annihilée, et les impulsions restent inchangées. Cette théorie n'a pas non plus d'états liés, ce qui, évidemment, aurait été un signe certain d'interactions.  
Si l'on calculait la matrice  $S$  (de diffusion), on trouverait  $S = 1$  : il n'y a pas de diffusion. *Les particules sont libres*. C'est un fait général que toutes les théories correspondant à un lagrangien quadratique dans les champs et dans leurs dérivées sont des théories libres, qu'il s'agisse de champs de spin 0, 1/2, 1, etc.
3. Les particules décrites par le champ  $\varphi$  sont des *bosons*. On peut le voir de la manière simple suivante. Imaginons que l'on soit à suffisamment basse énergie pour qu'il n'y ait pas création de particules, si bien que l'on puisse se limiter dans l'espace de Fock aux secteurs à nombre de particules fixé. En d'autres termes, on fait de la mécanique quantique galiléenne. Considérons alors un système à deux particules et calculons sa fonction d'onde :

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\langle \vec{r}_1 | \otimes \langle \vec{r}_2 |) a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger |0\rangle \quad (1.180)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle \vec{r}_1 | \otimes \langle \vec{r}_2 |) (a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger + a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_1}^\dagger) |0\rangle \quad (1.181)$$

$$= \frac{1}{2} \langle \vec{r}_1 | \otimes \langle \vec{r}_2 | (|\vec{k}_1\rangle \otimes |\vec{k}_2\rangle + |\vec{k}_2\rangle \otimes |\vec{k}_1\rangle) \quad (1.182)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle \vec{r}_1 | \vec{k}_1 \rangle \langle \vec{r}_2 | \vec{k}_2 \rangle + \langle \vec{r}_1 | \vec{k}_2 \rangle \langle \vec{r}_2 | \vec{k}_1 \rangle) \quad (1.183)$$

$$\Rightarrow \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \quad (1.184)$$

Il y a donc symétrie dans l'échange des particules : il s'agit bien de bosons.

4. Évidemment, la propriété précédente vient de ce que nous avons choisi des commutateurs entre  $\varphi$  et  $\Pi$ , et non des anti-commutateurs. Nous mentionnerons dans la suite l'endroit où le choix d'anti-commutateurs aurait eu des conséquences dramatiques (liées à la causalité de la théorie). De ce fait, *seul le choix de commutateurs assure une théorie entièrement viable*. On voit donc que la combinaison relativité + physique quantique entraîne la relation spin-statistique.<sup>48</sup> Le « principe de Pauli » n'est plus un principe,

<sup>47</sup>Le fait que  $\varphi$  soit hermitique impose que les particules associées à  $\varphi$  soient leur propre anti-particule. En cela, notre exemple est trop simple.

<sup>48</sup>Nous n'en avons parlé que pour le spin 0, mais c'est vrai de façon générale. Nous le montrerons sur les spineurs de Dirac (spin 1/2).

c'est un théorème. La chose particulièrement étrange est que la relativité de Lorentz semble nécessaire pour démontrer cela, alors que ce résultat est absolument valable même dans le cas galiléen. Personne n'a résolu à ce jour cette énigme.

5. Nous avons travaillé en transformée de Fourier et c'est la raison pour laquelle sont apparus les  $a_{\vec{k}}$  et  $a_{\vec{k}}^\dagger$  qui détruisent ou créent une particule dans un état propre d'impulsion :

$$a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad \text{avec} \quad \vec{P}|\vec{k}\rangle = \vec{k}|\vec{k}\rangle \quad (1.185)$$

Mais on aurait pu envisager une autre base. Montrons donc dans le cadre quantique galiléen un petit théorème.

Soit  $\{|\alpha\rangle\}$  une base d'un espace de Hilbert et  $a_\alpha^\dagger$  le créateur dans l'état  $|\alpha\rangle$  :

$$a_\alpha^\dagger |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (1.186)$$

La relation entre  $a_{\vec{k}}^\dagger$  et  $a_\alpha^\dagger$  s'obtient trivialement en insérant une relation de fermeture :<sup>49</sup>

$$|\alpha\rangle = \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k} | \alpha \rangle \quad (1.187)$$

Soit pour un système de  $n$  particules dans les états  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , certains  $\alpha_i$  pouvant être égaux :

$$a_\alpha^\dagger |\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle = |\alpha \alpha_1 \dots \alpha_n\rangle \quad (1.188)$$

$$= a_{\alpha_1}^\dagger \dots a_{\alpha_n}^\dagger |\alpha\rangle \quad (1.189)$$

$$= a_{\alpha_1}^\dagger \dots a_{\alpha_n}^\dagger \sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k} | \alpha \rangle \quad (1.190)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \langle \vec{k} | \alpha \rangle a_{\alpha_1}^\dagger \dots a_{\alpha_n}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle \quad (1.191)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \langle \vec{k} | \alpha \rangle a_{\vec{k}}^\dagger |\alpha_1 \dots \alpha_n\rangle \quad (1.192)$$

L'égalité précédente étant valable quelque soit le ket de base, on a :

$$a_\alpha^\dagger = \sum_{\vec{k}} \langle \vec{k} | \alpha \rangle a_{\vec{k}}^\dagger$$

Si l'on prend pour  $\{|\alpha\rangle\}$  la base  $\{|\vec{x}\rangle\}$ , on a :

$$\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle \sim e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (1.193)$$

si bien que  $a_{\vec{x}}^\dagger$  est la transformée de Fourier de  $a_{\vec{k}}^\dagger$ . Ainsi, si l'on décompose  $\varphi(x)$  en une partie de création (dite à fréquence négative) et une partie d'annihilation (dite à fréquence positive) :

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi^+(x)}_{a_{\vec{k}}} + \underbrace{\varphi^-(x)}_{a_{\vec{k}}^\dagger} \quad (1.194)$$

$$\varphi^-(x) \triangleq \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (1.195)$$

<sup>49</sup>On a mis ici une somme discrète sur les états  $|\vec{k}\rangle$  par commodité d'écriture. En réalité il faudrait considérer une intégrale.

(à volume infini, voir page 37), on voit que  $\varphi^-(x)$  ressemble diablement à un  $a_{\vec{x}}^\dagger$ . En fait :

$$\varphi^-(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} \quad (1.196)$$

où la fonction de Dirac indique une particule libre de masse  $m$ , et celle de Heaviside sélectionne  $E = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ .

Bien sûr, comme on l'a dit, parler de particule quantique et relativiste située en un point n'a guère de sens et il n'existe pas de  $|x\rangle$  quadri-dimensionnel analogue à  $|\vec{x}\rangle$ . Cependant, d'une part cela garde encore une partie de son sens pour les particules libres, et d'autre part c'est ce qui se rapproche le plus du  $a_{\vec{x}}^\dagger$ . C'est le mieux que l'on puisse faire pour cette analogie dans le cadre lorentzien. Moralité, on a une interprétation claire de  $a_{\vec{k}}^\dagger$  que l'on soit ou non dans le cas lorentzien, et le  $a_{\vec{x}}^\dagger$  du cas galiléen est remplacé par  $\varphi^-(x)$  qui crée une particule libre (d'énergie positive) vérifiant la condition de « couche de masse »  $k^2 = m^2$ . De même,  $a_{\vec{x}}$  est remplacé par  $\varphi^+(x) = (\varphi^-(x))^\dagger$ . *Un champ quantique est donc la somme d'un créateur et d'un annihilateur.* Ça n'est donc finalement pas si horrible que cela, même si les choses ne sont simples que dans l'espace des  $\vec{k}$ .<sup>50</sup>

### Exercice

---

Calculer  $\langle 0 | \varphi(\vec{x}, 0) | \vec{p} \rangle$ . À quoi cela vous fait-il penser ? Comment l'interpréter ?

---

On a donc un oscillateur harmonique quantique en tout point. Mais qu'est-ce qui peut bien osciller ? Les particules ? Non, bien sûr. Elles vont « en ligne droite à vitesse constante ». C'est évidemment l'éther qui oscille!<sup>51</sup> Les vibrations quantifiées (les excitations) de l'éther nous apparaissent comme des particules qui ont donc un peu le même statut que les phonons :

- oscillations des ions du réseau  $\xrightarrow{\text{quantique}}$  phonons ;
- oscillations de l'éther  $\xrightarrow{\text{quantique}}$  particules.

Remarquons que si nous ne connaissons les ions d'un réseau que par leurs oscillations, nous pourrions totalement les éliminer de la théorie au profit des phonons. Les ions seraient tout aussi « abstraits » que « l'éther » de la physique des particules. Notons qu'il doit y avoir autant d'éthers que de types de particules (un pour l'électrons, un pour le photon  $A_\mu$ , etc). Finalement, et c'est bien là le défaut de cet éther, il n'a aucune propriété spécifique (contrairement aux modèles du 19<sup>e</sup> siècle) et n'est donc qu'un mot vide de contenu. Seules ses excitations sont intéressantes.

6. Le hamiltonien du système fixe la façon dont les excitations interagissent entre elles (pour l'instant nous n'avons pas mis d'interaction). Sur un réseau par exemple, un opérateur comme  $a_{\vec{x}_i}^\dagger a_{\vec{x}_j}$ , où  $\vec{x}_i$  et  $\vec{x}_j$  sont des points du réseau « plus proches voisins », décrit la propagation d'une particule de  $\vec{x}_i$  à  $\vec{x}_j$  : on annihile la particule en  $\vec{x}_j$  et on la

---

<sup>50</sup> On verra au chapitre suivant comment caractériser quantitativement la difficulté à localiser une particule quantique et relativiste et le rôle précis joué par la longueur d'onde de Compton.

<sup>51</sup> Comme le dit Polyakov (« Gauge theories and strings »), « comme quoi les poubelles du passé peuvent contenir les trésors du futur ».

recrée en  $\vec{x}_i$ . C'est un terme d'énergie cinétique. Un terme comme :

$$\sum_{\langle \vec{x}_i \vec{x}_j \rangle} a_{\vec{x}_i}^\dagger a_{\vec{x}_j} \quad (1.197)$$

où la notation  $\langle \vec{x}_i \vec{x}_j \rangle$  indique une sommation sur les sites plus proches voisins, est proportionnel à l'énergie cinétique totale du système. À la limite du continu (la maille du réseau tend vers zéro), ce terme devient :

$$\int d^D x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \quad (1.198)$$

Ce terme est pour cette raison appelé terme cinétique (analogue au  $\sum m \dot{x}_i^2/2$  des particules). Un terme en  $V(\varphi(x))$  (ex :  $\varphi^4(x)$ ) décrit une interaction à quatre particules (par exemple, deux entrantes et deux sortantes) lorsque celles-ci sont au même point. Ce choix de localité (le seul apparemment viable pour les champs) a son prix car comme on l'a dit la notion de position est délicate. Ces problèmes se retrouveront dans la suite lorsqu'on étudiera la renormalisation.

7. Le terme  $\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}/2$  a une origine bien simple : c'est la somme des énergies de point zéro de chacun des oscillateurs. L'ennui est que cette somme diverge. Mais :
  - Il ne fait après tout que changer l'origine des énergies qui (tant qu'on oublie la gravitation) est censée être arbitraire.
  - Il dépend du choix d'ordre des opérateurs lors du passage du classique au quantique (car ceux-ci ne commutent alors plus). Or, *rien ne prescrit ce choix*. Le choix dit d'ordre normal consistant à mettre tous les annihilateurs à droite et tous les créateurs à gauche aurait supprimé cette constante tout en préservant toutes les bonnes propriétés de notre théorie : invariance de Lorentz, causalité, localité, etc, et aurait donc « réglé » ce problème.
8. Cependant, il faut faire attention quand on se place dans des géométries finies (effet Casimir, cf Itzykson-Zuber par exemple). En physique du solide, cette énergie de point zéro est importante : c'est elle qui empêche l'hélium de se solidifier même à basse température. En conclusion, on peut oublier cette « énergie du vide » car c'est une constante. Il suffit de la soustraire par une renormalisation du zéro de l'énergie. Ceci n'a aucune importance sauf si l'on se met à comparer deux énergies du vide dans deux géométries différentes.

**Commutateurs aux temps quelconques** Il est instructif pour étudier la causalité de la théorie de calculer le commutateur  $[\varphi(x), \varphi(y)]$  :

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \frac{d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}'}} \left( [a_{\vec{k}} e^{-ikx}, a_{\vec{k}'}^\dagger e^{ik'y}] + [a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx}, a_{\vec{k}'} e^{-ik'y}] \right) \quad (1.199)$$

$$= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}) \quad (1.200)$$

car  $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$  avec nos conventions en volume infini. On se souvient de :

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) \dots = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \dots \quad (1.201)$$

et donc :

$$\boxed{[\varphi(x), \varphi(y)] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \theta(k_0) e^{-ik(x-y)} = K(x-y)}$$

Cette expression est manifestement un scalaire de Lorentz. Pour  $x_0 = y_0$ , on retrouve  $[\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi(x), \varphi(y)]^{\bar{}} = 0$ . Or, si  $x_0 = y_0$ , alors  $(x-y)^2 \leq 0$ . Cette condition est invariante de Lorentz, car le carré minkowskien est un scalaire. On retrouve la discussion de la page 33.

$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0$  pour  $(x-y)^2 < 0$  implique que la mesure de  $\varphi$  en  $x$  ne peut pas influencer celle de  $\varphi$  en  $y$  s'ils ne sont pas causalement reliés. On peut montrer que ceci suffit à assurer la causalité de la théorie. C'est ce point qui n'aurait plus si l'on avait pris des anti-commutateurs pour « quantifier »  $\varphi$  et  $\Pi$ . Il n'y aurait plus *microcausalité* et, du coup, la théorie ne serait plus causale.

### 1.5.3 Le champ scalaire non hermitique libre

Il va être intéressant d'étudier ce cas car, comme on le verra plus tard, seul un champ complexe (i.e. non hermitique) peut être couplé à un champ électromagnétique  $A_\mu$  de façon invariante de jauge. Ceci tient au fait, que nous avons déjà vu dans l'exercice de la page 19, que ce système possède une symétrie  $SO(2) = U(1)$  et donc qu'il existe un courant et une charge conservés. Cette dernière s'identifie, une fois couplée à  $A_\mu$ , à la charge électrique.

On considère donc deux champs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  hermitiques. On pose :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) \\ \varphi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)) \end{cases} \quad (1.202)$$

On a :

$$\partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi = \frac{1}{2}(\partial\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\varphi_2)^2 \quad (1.203)$$

$$\text{et} \quad m^2 \varphi^\dagger \varphi = \frac{1}{2}m^2 \varphi_1^2 + \frac{1}{2}m^2 \varphi_2^2 \quad (1.204)$$

et donc, pour le lagrangien libre :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \quad (1.205)$$

$$= \frac{1}{2}((\partial\varphi_1)^2 - m^2 \varphi_1^2) + \frac{1}{2}((\partial\varphi_2)^2 - m^2 \varphi_2^2) \quad (1.206)$$

$$= \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (1.207)$$

Les commutateurs canoniques à temps égaux imposent à  $\varphi$  l'algèbre (le vérifier) :

$$\begin{cases} [\varphi(x), \varphi(y)]^{\bar{}} = [\varphi^\dagger(x), \varphi^\dagger(y)]^{\bar{}} = 0 \\ [\Pi_\varphi(x), \Pi_\varphi(y)]^{\bar{}} = [\Pi_{\varphi^\dagger}(x), \Pi_{\varphi^\dagger}(y)]^{\bar{}} = 0 \\ [\varphi(x), \Pi_\varphi(y)]^{\bar{}} = [\varphi^\dagger(x), \Pi_{\varphi^\dagger}(y)]^{\bar{}} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{cases} \quad (1.208)$$

avec (le vérifier) :

$$\begin{cases} \Pi_\varphi = \partial_0 \varphi^\dagger \\ \Pi_{\varphi^\dagger} = \partial_0 \varphi \end{cases} \quad (1.209)$$

Comme il y a deux champs, il y a deux types de particules, donc deux types de créateurs et d'annihilateurs. Le développement en modes de  $\varphi(x)$  donne :

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} (a_{\vec{k}} e^{-ikx} + b_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx}) \quad (1.210)$$

et donc :

$$\varphi^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} (a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx} + b_{\vec{k}} e^{-ikx}) \quad (1.211)$$

avec :

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = [b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (1.212)$$

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] = [b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}] = [a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad (1.213)$$

Il y a deux types d'opérateurs nombre de particules :

$$\begin{cases} N_{\vec{k}}^{(a)} \triangleq a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \\ N_{\vec{k}}^{(b)} \triangleq b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} \end{cases} \quad (1.214)$$

qui vérifient (le montrer) :

$$[N_{\vec{k}}^{(a)}, N_{\vec{k}}^{(b)}] = 0 \quad (1.215)$$

On trouve pour la quadri-impulsion :

$$P = \sum_{\vec{k}} (N_{\vec{k}}^{(a)} + N_{\vec{k}}^{(b)}) k \quad (1.216)$$

ce qui ne choquera personne.

Chose amusante, il y a une nouvelle symétrie (cf. exercice page 19). En effet, si l'on transforme  $\varphi$  par :

$$\begin{cases} \varphi' = e^{i\alpha} \varphi \\ \varphi'^\dagger = e^{-i\alpha} \varphi^\dagger \end{cases} \quad (1.217)$$

avec  $\alpha$  indépendant de  $x$  (ce n'est pas une transformation de jauge), alors :

$$\partial_\mu \varphi'^\dagger \partial^\mu \varphi' - m^2 \varphi'^\dagger \varphi' = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (1.218)$$

Cette symétrie est appelée  $U(1)$  car l'ensemble  $\{e^{i\alpha}\}$  est justement  $U(1)$ . Il existe donc un courant et une charge de Noether (conservés). Avec  $\alpha$  infinitésimal :

$$\delta x^\mu = 0 \quad (1.219)$$

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = i\alpha \varphi(x) \quad (1.220)$$

Le courant conservé est donc (au paramètre infinitésimal  $i\alpha$  près) :

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\dagger)} \delta \varphi^\dagger \quad (1.221)$$

$$= (\varphi \partial_\mu \varphi^\dagger - \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi) i\alpha \quad (1.222)$$

Donc, en renommant  $J_\mu$  le terme précédent divisé par  $i\alpha$  :

$$J^\mu = \varphi \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi^\dagger$$

La charge conservée est donc (en la redéfinissant par un facteur  $-i$ ) :

$$Q' = -iQ \quad (1.223)$$

$$= -i \int d^3\vec{x} J^0 \quad (1.224)$$

$$= -i \int d^3\vec{x} (\Pi_\varphi \varphi - \Pi_{\varphi^\dagger} \varphi^\dagger) \quad (1.225)$$

$$Q' = \sum_{\vec{k}} \left( N_{\vec{k}}^{(a)} - N_{\vec{k}}^{(b)} \right) \quad (1.226)$$

$Q$  est évidemment constante pour les champs libres puisque  $N_{\vec{k}}^{(a)}$  et  $N_{\vec{k}}^{(b)}$  le sont séparément. Ça n'est plus le cas lorsqu'on met un terme en  $u(\varphi^\dagger \varphi)^2$  qui est toujours invariant par symétrie, mais qui crée une interaction entre les particules de types  $a$  et  $b$ , dont les nombres ne sont plus, du coup, séparément invariants. Pour autant,  $Q'$  est toujours une constante. En fait, les  $a$  et les  $b$  sont en tous points identiques (masse, spin) à cette charge près, positive pour les premiers et négative pour les seconds. Les  $a$  et les  $b$  sont anti-particules les uns des autres.

Le couplage d'un champ scalaire à  $A_\mu$  s'obtient en changeant  $\partial_\mu \varphi$  en  $(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi$ . C'est la prescription dite de couplage minimal.<sup>52</sup> On vérifiera alors aisément que  $\mathcal{L} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi^\dagger(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi$  produit un couplage entre  $\varphi$  et  $A^\mu$  du type champ-courant :<sup>53</sup>

$$-ieA^\mu \varphi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi = ieA^\mu J_\mu \quad (1.228)$$

$J_\mu$  est donc bien le courant de charge couplé à  $A_\mu$  et  $Q'$  l'opérateur de charge du système. Du coup, on constate que :

- pour pouvoir coupler un scalaire à un champ  $A_\mu$  de manière invariante de jauge (ce sont les seules théories qui sont finalement renormalisables), il faut que le champ scalaire soit complexe. Il y a alors deux types de particules qui ont même masse (car seul  $m^2 \varphi^\dagger \varphi$  est invariant de jauge), évidemment même spin et *des charges opposées*.
- le courant de Noether est celui qui est couplé à  $A_\mu$ . Ceci assure que *la charge est conservée dans tout processus* puisque le couplage respecte la symétrie  $U(1)$  (c'est même une symétrie réalisée localement dans ce cas).

On voit sur cet exemple qu'en théorie quantique des champs il y a symétrie entre les deux signes de la charge. Ceci implique l'existence de particules de même masse, spin, etc, et de charge opposée : ce sont les *anti-particules*. L'existence des anti-particules est en fait également nécessaire pour assurer la causalité de la théorie (cf. Peskin et Schroeder page 29, ou bien « The reasons for antiparticles » de R.P. Feynman in « Elementary particles and the laws of physics : the 1986 Dirac memorial lectures » (Cambridge, 1987), dont il existe une traduction française. Consulter également le très bon article « Classical antiparticles » de J.P. Costella et al., American Journal of Physics 65 (1997) 835, où il est montré que la notion

<sup>52</sup>Pour avoir une théorie invariante de jauge  $U(1)$ , i.e. invariante par le changement  $\varphi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\varphi(x)$  (possible seulement si  $\varphi$  est complexe), il faut ajouter un champ « de jauge »  $A_\mu$  se transformant par  $A'_\mu = A_\mu - \partial^\mu \alpha$  de telle sorte que :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi^\dagger(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi \quad (1.227)$$

soit invariant de jauge (le vérifier).

<sup>53</sup>Remarque : il existe aussi un couplage en  $A_\mu A^\mu \varphi^\dagger \varphi$ .



d'anti-particule est d'origine classique (et non quantique) une fois supposée l'existence des particules).